10 Funcions exponencials i logarítmiques

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Conèixer les característiques de la funció de proporcionalitat inversa i els fenòmens que descriuen.
- Trobar les asímptotes d'una hipèrbola.
- Reconèixer i representar funcions exponencials.
- Aplicar les funcions exponencials a l'interès compost i a altres situacions.
- Calcular el logaritme d'un nombre.
- Interpretar les gràfiques de les funcions logarítmiques.

Abans de començar

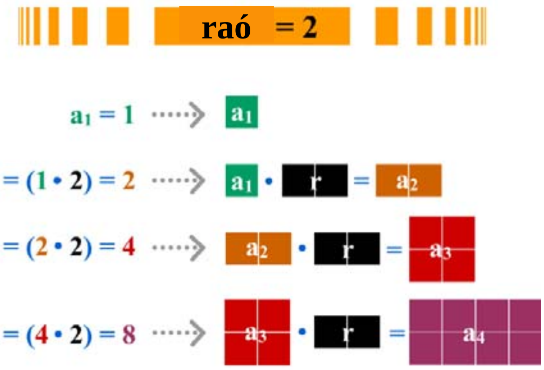
Recordeu

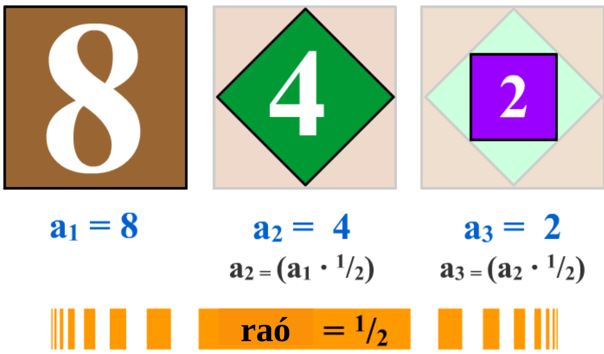
El curs passat vau estudiar les progressions tant aritmètiques com geomètriques, en l'animació podeu repassar aquestes últimes, us anirà bé per comprendre millor la funció exponencial.

Progressió geomètrica

Una progressió geomètrica està constituïda per una seqüència d'elements en qué cada un s'obté multiplicant l'anterior per una constant denominada raó de la progressió.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...$	3, 12, 48, 192...
raó : d	raó : 4
a_1	$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot d$	$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$a_3 = a_2 \cdot d$	$a_3 = 12 \cdot 4 = 48$
$a_4 = a_3 \cdot d$	$a_4 = 48 \cdot 4 = 192$
...	...
$a_n = a_{n-1} \cdot d$	





Investigueu

Benjamin Franklin, famós científic i estadista, va deixar un llegat de 1.000 lliures a les ciutats de Boston i Filadèlfia perquè es deixessin a joves aprenents al 5% anual. Segons Franklin, al cap de 100 anys s'haurien convertit en 131.000 lliures, de les quals 100.000 serien per a obres públiques i les 31.000 restants tornarien a utilitzar-se com a préstecs 100 anys més. Ho va calcular bé?

1. Funcions racionals

La funció de proporcionalitat inversa

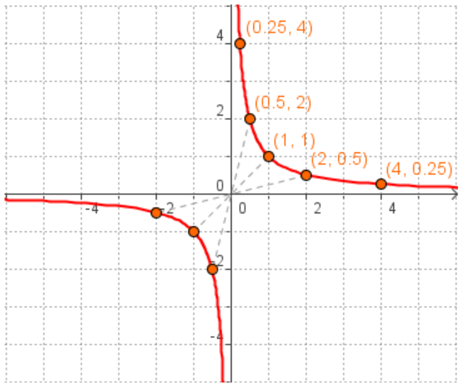
La funció de proporcionalitat inversa relaciona dues magnituds inversament proporcionals.

L'expressió algebraica és: $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$

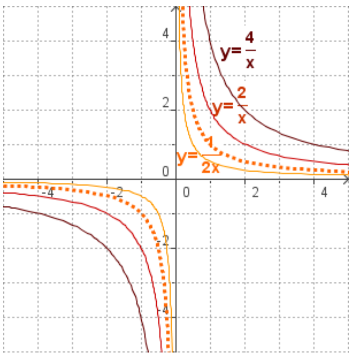
La gràfica és una **hipèrbola**. A la figura es pot veure el traçat de f(x)=1/x.

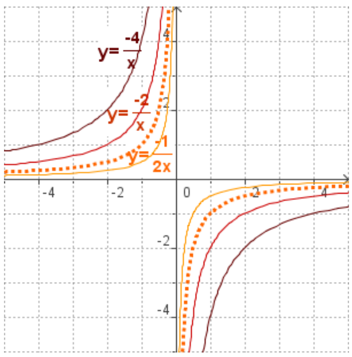
Haciendo una tabla de valores:

x	1	2	0,5	4	0.25	-1	-2	-0.5
f(x)	1	0,5	2	0,25	4	-1	-0,5	-2



A partir d'aquesta observeu com canvia la gràfica en variar el valor de la constant k:





- El **domini** i el **recorregut** són tots els reals excepte el 0.
- És una funció **senar**: f(-x)=k/(-x)=-f(x).
- Si **k>0** la funció és **decreixent** i la seva gràfica apareix als quadrants 1r i 3r.
- Si **k<0** la funció és **creixent** i la seva gràfica està al 2n i 4t quadrant.

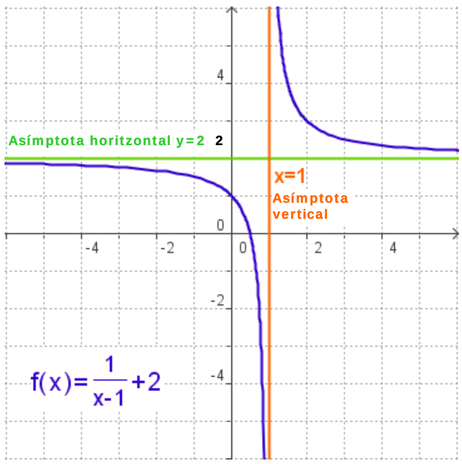
Les asímptotes

En la gràfica de la funció f(x) = k/x es pot observar com les branques de la hipèrbola s'aproximen en als eixos de coordenades, són les asímptotes.

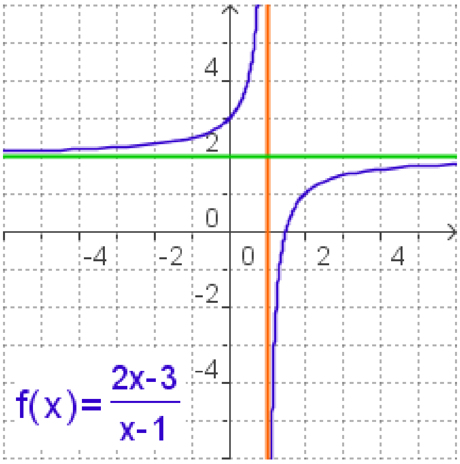
Quan la gràfica d'una funció s'apropa cada vegada més a una recta, i es confonen, es diu que la recta és una **asímptota**.

Tot i que aquestes rectes poden anar cap a qualsevol direcció en el pla, aquí ens limitarem a les:

- ✓ **Asímptotes verticals.** La recta **x = a** és una asímptota vertical de la funció si es verifica que quan el valor x tendeix al valor a, el valor de f(x) tendeix a valors cada vegada més grans, $f(x)\to+\infty$, o més petits, $f(x)\to-\infty$.
- ✓ **Asímptotes horitzontals.** La recta **y = b** és una asímptota horitzontal de la funció si es verifica que quan $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, el valor de $f(x) \to b$.



- Asímptota vertical **x=1**
  $x\to1^{+}$ (per la dreta) $f(x)\to+\infty$
  $x\to1^{-}$ (per l'esquerra) $f(x)\to-\infty$
- Asímptota horitzontal **y=1**
  $x\to+\infty$ $f(x)\to 2$
  $x\to-\infty$ $f(x)\to 2$



Calculem les asímptotes

- El denominador és 0 si x=1, **AV: x=1**
- Al dividir numerador per denominador

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2x-3} & \underline{|\ \mathbf{x-1}\ } \\ \underline{-2x+2} & \ 2 \quad \text{Quocient} \\ \text{Residu:}\ \mathbf{-1} & \end{array}$$

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{x-1}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{x-1}} + \mathbf{2} \quad \textbf{AH: y=2}$$

I el residu indica la forma de la hipèrbole, com la y= **−1**/x

Altres funcions racionals

Les funcions racionals són les que la seva expressió algebraica és un quocient de polinomis.

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$$

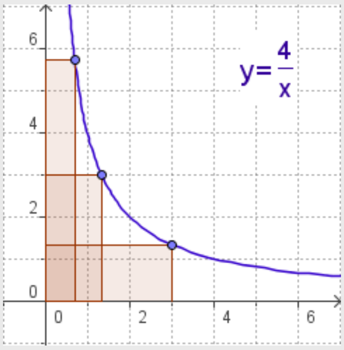
- El seu **domini** són tots els reals excepte els que anul·len el denominador. En aquests punts hi ha una asímptota vertical.
- Si el grau del numerador i del denominador coincideixen hi ha asímptota horitzontal
- Per calcular el punt de coincidència amb l'eix OY es calcula f(0), i per calcular els punts coincidents amb l'eix OX es resol l'equació P(x)=0.

La més senzilla de totes és la funció de proporcionalitat inversa amb què s'inicia aquest capítol.

Calcular i dibuixar les asímptotes, quan en tenen, permet saber com és la gràfica de la funció amb bastant de facilitat. En l'escena s'exemplifiquen alguns casos. Per a això es fa el quocient entre numerador i denominador com s'indica en l'exemple de l'esquerra.

Exercicis resolts

3. Quina és l'àrea dels rectangles de la figura?



Àrea = base x altura
En tots els rectangles dibuixats així
Àrea =x·y=4

4. La taula següent correspon a quantitats inversament proporcionals, completeu-la i escriviu l'expressió algebraica de la funció y=f(x).

x	f(x)
	-3
0.5	-12
	-1,2
-2	3
-3	
-1	

El producte de dues quantitats inversament proporcionals és constant.
En quest cas 0,5·(-12)=(-2)·3=**-6**

La funció és $f(x)=\frac{-6}{x}$

x	f(x)
2	-3
0.5	-12
5	-1,2
-2	3
-3	**2**
-1	**6**

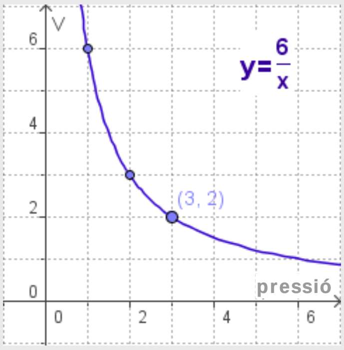
Exercicis resolts

3. Segons la Llei de Boyle-Mariotte, la pressió que exerceix un gas i el volum que ocupa són inversament proporcionals. A 25º determinada quantitat de gas ocupa un volum de 2 litres i exerceix una pressió de 3 atmosferes.

   a) Quin volum ocuparà quan la pressió exercida sigui d'1 atmosfera?

   b) Quina pressió exercirà quan el volum sigui de 3 litres?

   c) Escriviu la funció pressió→ volum i dibuixeu-ne la gràfica



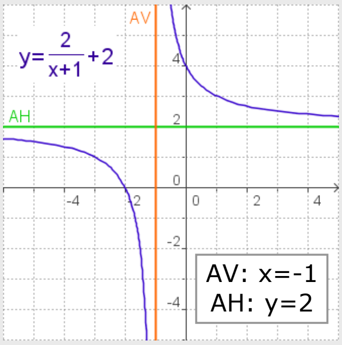
P·V=cte. en aquest cas P·V=6

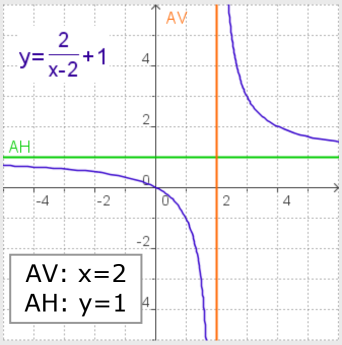
a) P=1 atm. V=6 litres

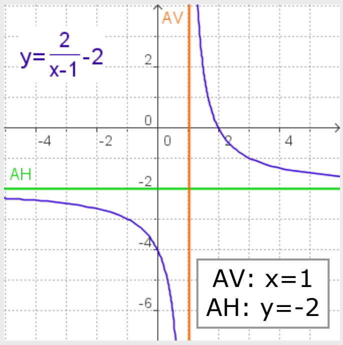
b) V=3 litres P=2 atm.

c) $f(x)=\frac{6}{x}$

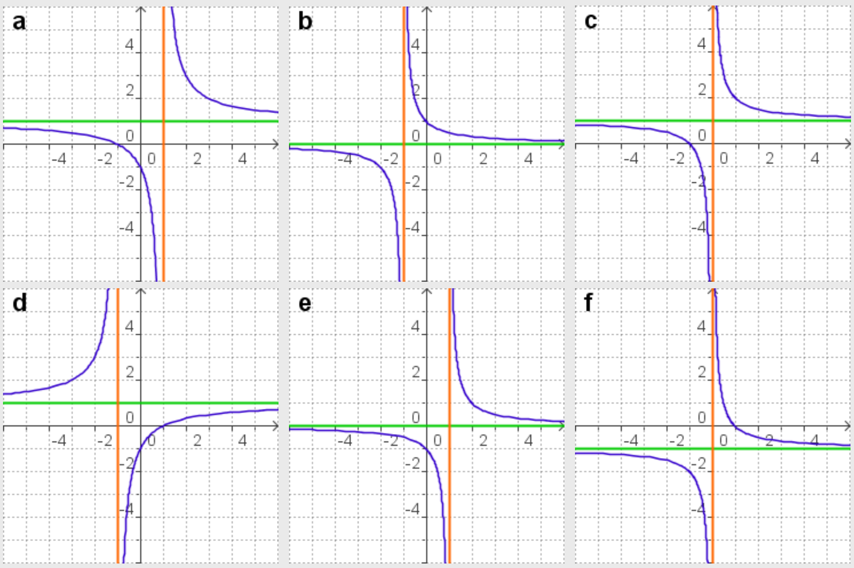
10. En les funcions següents, dibuixeu les asímptotes i escriviu-ne l'equació.







11. Decidiu quin gràfica correspon a cada funció:



1) $f(x)=\frac{1}{x-1} \rightarrow$ **e**

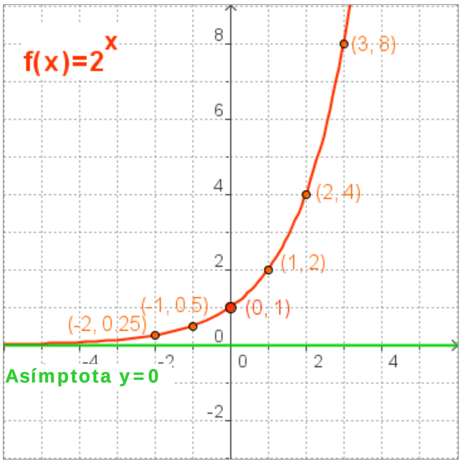
2) $f(x)=\frac{1}{x+1} \rightarrow$ **b**

3) $f(x)=\frac{x+1}{x} \rightarrow$ **c**

4) $f(x)=\frac{1-x}{x} \rightarrow$ **f**

5) $f(x)=\frac{x+1}{x-1} \rightarrow$ **a**

6) $f(x)=\frac{x-1}{x+1} \rightarrow$ **d**



2. Funcions exponencials

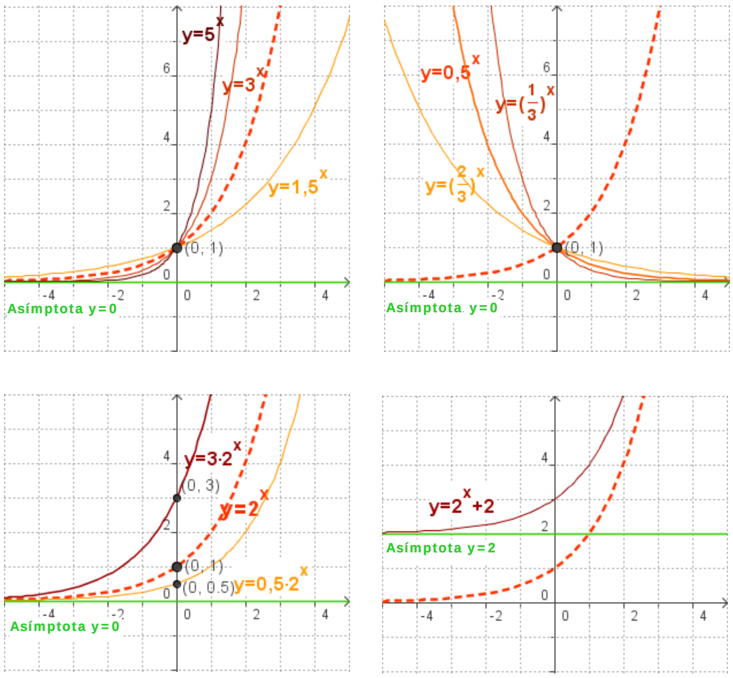
La funció exponencial

La funció exponencial és de la forma **y** = $\mathbf{a^x}$, amb **a** com a nombre real positiu.

A la figura es veu el traçat de la gràfica de $y=2^x$

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	-0.5
y	0,125	0,25	0,5	**1**	2	4	8	-2

Als gràfics inferiors es pot veure com canvia la gràfica en variar *a*. Observeu que les gràfiques de $\mathbf{y=a^x}$ i de $\mathbf{y=(1/^a)^x=a^{-x}}$ són simètriques respecte de l'eix OY

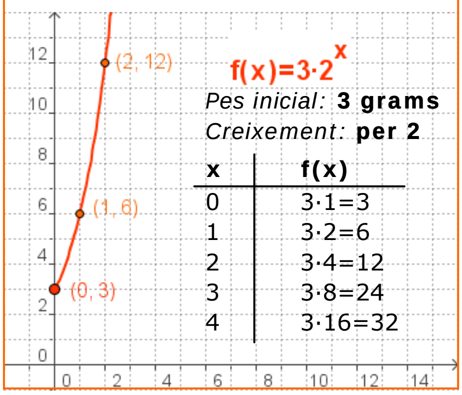


- El **domini** són els nombres reals i el **recorregut** són els reals positius
- És **contínua**
- Si **a>1** la funció és creixent i si **0<a<1** és **decreixent**.
- Talla l'eix OY en (0,1).
- L'eix OX és una **asímptota**
- La funció és **injectiva**, és a dir, que si $\mathbf{a^n=a^m}$, llavors **n=m**.

En les gràfiques de la dreta es pot veure com en multiplicar per una constant $\mathbf{y=k\cdot a^x}$ el punt de tall amb l'eix OY és **(0,k)**.

En sumar (o restar) una constant *b* la gràfica desplaça cap amunt (o cap avall) *b* unitats i l'asímptota horitzontal passa a ser **y=b**.

En un laboratori tenen un cultiu bacterià, si el seu pes es multiplica per 2 cada dia, com es el seu creixement si el seu pes inicial és de 3 grams?



f(x)=3·2^x

Pes inicial: **3 grams**

Creixement: **per 2**

x	**f(x)**
0	3·1=3
1	3·2=6
2	3·4=12
3	3·8=24
4	3·16=32

Creixement exponencial

La funció exponencial es presenta en multitud de fenòmens de creixement animal, vegetal, econòmic, etc. En tots aquests contextos la variable és el temps.

En el creixement exponencial, cada valor de **y** s'obté multiplicant el valor anterior per una quantitat constant **a**.

On **k** és el valor inicial (per a t = 0), **t** és el temps transcorregut i **a** és el factor pel qual es multiplica en cada unitat de temps.

Si **0<a<1** es tracta d'un decreixement exponencial.

Aplicacions

La funció exponencial serveix per descriure qualsevol procés que evolucioni de manera que l'augment (o la disminució) en un petit interval de temps sigui proporcional al que hi havia al seu començament.

En l'escena podeu veure tres aplicacions:

- Creixement de poblacions.
- Interès dels diners acumulats.
- Desintegració radioactiva.

✓ Interès compost

En l'interès compost els interessos produïts per un capital, C_0 s'hi van acumulant, de tant en tant, per produir interessos nous.

Els intervals de temps, al cap dels quals els interessos s'acumulen al capital, es diuen períodes de capitalització o d'acumulació. Si són t anys, r és el rèdit anual (interès anual en %) el capital final obtingut ve donat per la fórmula:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Si es consideren *n* períodes de temps (n=12 si mesos, n=4 si trimestres, n=365 si dies...) la fórmula anterior queda

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{nt}$$

Es col·loquen 5.000 € al 6% anual. En quant es convertiran al cap de 5 anys?

- *Si els interessos s'acumulen anualment*

  $C_F = 5000 \cdot 1.06^5 = 6691{,}13$ €

- *Si els interessos s'acumulen mensualment*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}005^{60} = 6744{,}25$ €

- *Si els interessos s'acumulen trimestralment*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}015^{20} = 6734{,}27$ €

✓ Creixement de poblacions

El creixement vegetatiu d'una població el dóna la diferència entre naixements i defuncions.

Si inicialment partim d'una població P_0 que té un índex de creixement anual i (expressat en tant per un), la població després d'un any serà:

$$\mathbf{P = P_0 \cdot (1+i)^t}$$

Un poble té 600 habitants. Se sap que la seva població creix a un ritme del 3% anual.

- *Quants habitants tindrà d'aquí a 8 anys?*

  $P = 600 \cdot 1.03^8 \approx 760$

✓ Desintegració radioactiva

Les substàncies radioactives es desintegren amb el pas del temps. La quantitat d'una certa substància radioactiva que va quedant amb el pas del temps t, la dóna: $\mathbf{M = M_0 \cdot a^t}$

$\mathbf{M_0}$ és la massa inicial,

$\mathbf{0 < a < 1}$ és una constant que depèn de la substància i de la unitat de temps que utilitzem.

La rapidesa de desintegració de les substàncies radioactives es mesura pel "*període de desintegració*", que és el temps que tarda la massa a reduir-se a la meitat.

Un gram d'estronci-90 es redueix a la meitat en 28 anys. Si l'any 2000 teníem 20 grams i prenem com a origen de temps l'any 2000.

- *La funció és:*

  $M(x) = 20 \cdot 0{,}5^{\frac{x}{28}} = 20 \cdot 0{,}9755^x$

- *L'any 2053 quedarà*

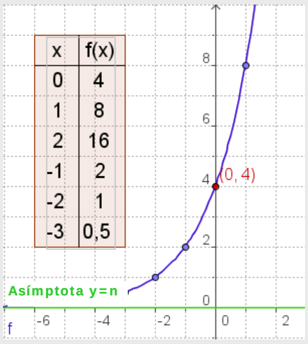
  $M = 20 \cdot 0{,}9755^{53} = 5{,}38$ gr

Exercicis resolts

6. Representa i estudia les funcions

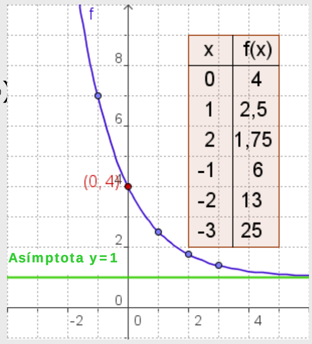
a) $f(x)=4\cdot 2^{x}$

Domini= IR
Recorregut=$(0,+\infty)$
Asímptota: y=0
Tall OY: (0,4)
Creixent



b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

Domini= IR
Recorregut=$(1,+\infty)$
Asímptota: y=1
Tall OY: (0,4)
Decreixent



7. Construïu una taula de valors d'una funció exponencial en cada cas i escriviu l'expressió algebraica.

a) f(-2)=2/9
i constant de creixement 3

x	f(x)
-2	**2 / 9**
-1	2/3
0	2
1	6
2	18
3	54

f(-2)=2/9
$f(-1)=3\cdot 2/9=2/3$
$f(0)=3\cdot 2/3=2$
$f(1)=3\cdot 2=6$
i així successivament

$f(x)=2\cdot 3^{x}$

b) f(0)=3
i constant de decreixement 1/4

x	f(x)
-2	48
-1	12
0	**3**
1	3/4
2	3/16
3	3/64

f(0)=3
$f(1)=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$f(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$
i així successivament
$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}=3\cdot 4^{-x}$

8. La taula correspon, en cada cas, a una funció exponencial. Escriviu la fórmula.

a)

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

$y=3^{x}$

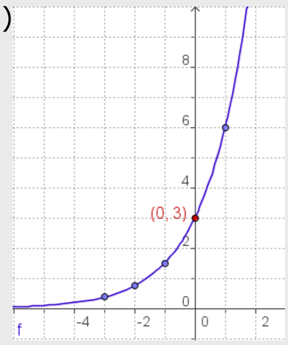
b)

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

$f(x)=(1/5)^{x}=5^{-x}$

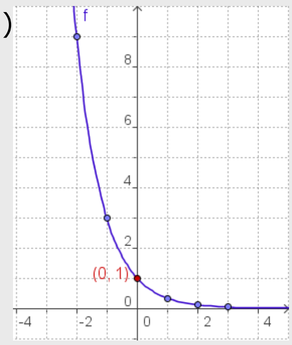
9. Indiqueu si la gràfica correspond a una funció amb creixement exponencial o amb decreixement. Escriviu la fórmula.

a)



Observeu la gràfica
f(0)=3
$f(1)=6=3\cdot 2$
f(-1)=1,5=3/2
La funció és:
$f(x)=3\cdot 2^{x}$
i és creixent

b)



Observeu la gràfica
f(0)=1
f(-1)=3
$f(-2)=9=3^{2}$
La funció és:
$f(x)=(1/3)^{x}=3^{-x}$
i és decreixent

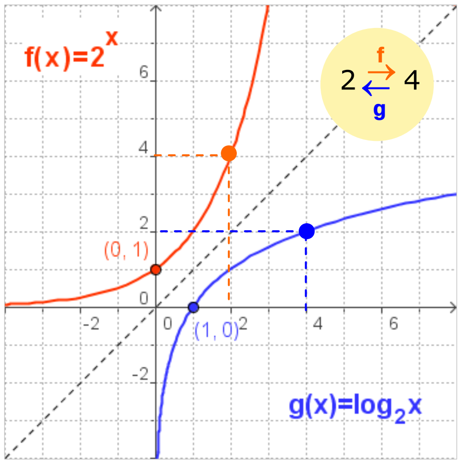
3. Funcions logarítmiques

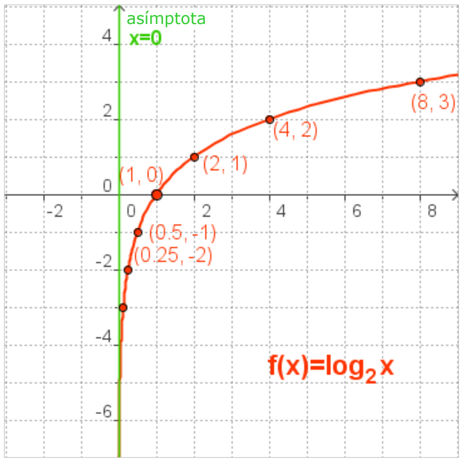
Funció inversa de l'exponencial

Donada una funció injectiva, y = f(x), s'anomena **funció inversa** de f una altra funció, g, la qual segueix g(y) = x. En l'escena adjunta construïm pas a pas la inversa de la funció exponencial.

Per a cada x s'obté ax. Al valor obtingut l'anomenem y o f(x). La funció inversa de l'exponencial és la que compleix que **g(y) = x**.

Aquesta funció s'anomena **funció logarítmica** i com podeu observar és simètrica a la funció exponencial respecte a la bisectriu del primer quadrant i el tercer.





La funció logarítmica

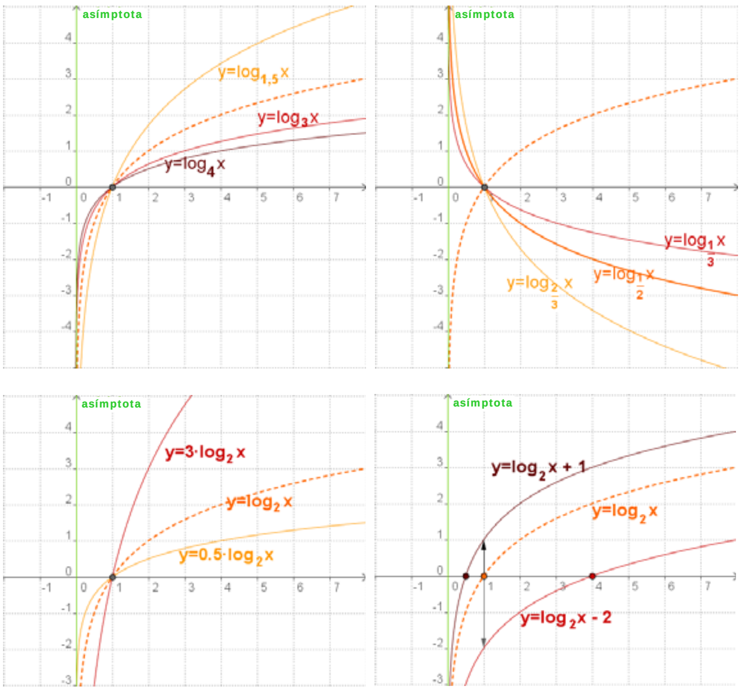
És la funció inversa de la funció exponencial i es denota de la manera següent:

y = log$_a$x, amb a>0 i diferent d' 1.

En l'escena construïm la gràfica de manera similar a com ho vam fer amb l'exponencial. Les seves propietats són *"simètriques"*.

x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

A les gràfiques inferiors es pot veure com canvia la gràfica en variar a.



- El **domini** són els reals positius i el **recorregut** són tots els reals.
- És **contínua**
- Si **a>1** la funció és **creixent** i si **0 < a <1** és **decreixent**.
- Talla a l'eix OX en (1,0).
- L'eix OY és **asímptota**
- La funció és **injectiva**: si **a^m=a^n** llavors **m=n**.

En les gràfiques de la dreta es pot veure com en multiplicar per una constant **y=k·log$_a$x** canvia la rapidesa amb què la funció creix o decreix (k<0).

En sumar (o restar) una constant *b* la gràfica desplaça cap amunt (o cap avall) *b* unitats, canviant el punt de tall amb l'eix d'abscisses.

$$\log_2 128 = 7 \longleftrightarrow 2^7 = 128$$

$$\log_3 \frac{1}{243} = -4 \longleftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{243}$$

$$\log_{1/2} 8 = -3 \longleftrightarrow (1/2)^{-3} = 8$$

$$\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2 \longleftrightarrow (1/3)^2 = \frac{1}{9}$$

Logaritmes

Donats dos nombres reals positius, **a** i **b** (**a≠1**), anomenem **logaritme en base a de b** al nombre que cal elevar **a** per obtenir **b**.

La definició anterior indica que:

$\log_a b = c$ equival a $a^c = b$

Fixeu-vos en els exemples de l'esquerra

Siguin: $x=\log_a b$ $\quad a^x=b$
$y=\log_a c$ $\quad a^y=c$
$z=\log_a(b\cdot c)$ $\quad a^z=b\cdot c$

- $a^x\cdot a^y=a^{x+y}=a^z \Rightarrow z=x+y$
- $a^x/a^y=a^{x-y}=a^z \Rightarrow z=x-y$
- $(a^x)^m=a^{x\cdot m}=a^z \Rightarrow z=x\cdot m$

Propietats dels logaritmes

- Logaritme d'un producte: $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritme d'un quocient: $\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$
- Logaritme d'una potència: $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En qualsevol base: $\log_a 1=0$ ja que $a^0=1$
  $\log_a a=1$ ja que $a^1=a$

Amb la calculadora

Per calcular logaritmes

- log 9,043
  Teclegeu 9 [.] 043 [log]
  Apareixerà: [0.9563125]

Comproveu-ho amb la tecla 10^x
  Teclegeu [INV] [10^x]
  Apareixerà: [9.043]

Si introduïu:

- log 904,3
  Teclegeu 904 [.] 3 [log]
  Apareixerà: [2.9563125]

Observeu: 904,3=9,043·100
log904,3=log9,043 +2

Canvi de base:

- $\log_3 9043$
  Teclegeu 9043 [log]
  Apareixerà: [3.9563125]
  Teclegeu [÷] 3 [log]
  Apareixerà: [0.4771212]
  Teclegeu [=] i surt el resultat:
  [8,2920484]

Logaritmes decimals

Són els logaritmes de base **10**. Són els més utilitzats i per aquest motiu, no s'acostuma a escriure la base quan s'utilitzen.

log 10 = log 10^1=1
log 100 = log 10^2=2
log 1000 = log 10^3 = 3
log 10000 = log 10^4 = 4 , ...etc

Observeu que llavors el log d'un número de 2 xifres, comprès entre 10 i 100, és 1... ; el log dels nombres de 3 xifres serà 2... ; etc.

D'altra banda:

log 0,1 = log 10^{-1} = -1
log 0,01 = log 10^{-2} = -2
log 0,001 = log 10^{-3} = -3, ...etc

Llavors el log d'un número comprès entre 0,01 i 0,1 serà **–**1...; el d'un comprès entre 0,001 i 0,01 serà **–**2,...,etc.

Canvi de base

Les calculadores normalment permeten calcular dos tipus de logaritmes: decimals (base=10) i neperians o naturals (base=e), que s'estudien en cursos posteriors. Quan volem calcular logaritmes en qualsevol altra base hem de recórrer a la fórmula del canvi de base:

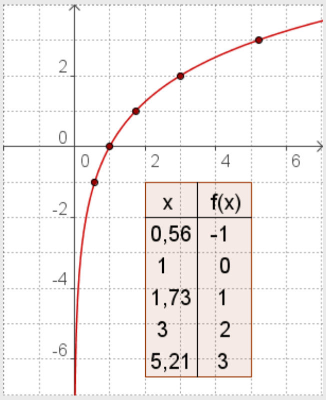
$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Exercicis resolts

12. Representeu i estudieu les funcions

a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

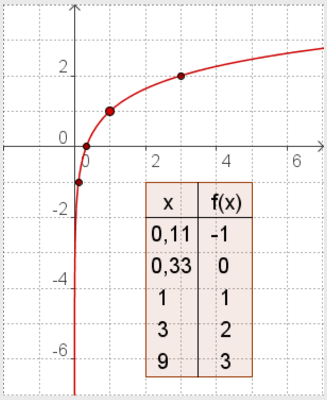
Domini=$(0,+\infty)$
Recorregut= IR
Asímptota: x=0
Tall OX: (1,0)
Creixent



x	f(x)
0,56	-1
1	0
1,73	1
3	2
5,21	3

b) $f(x)=\log_3 x+1$

Domini=$(0,+\infty)$
Recorregut= IR
Asímptota: x=0
Tall OX: (1/3,0)
Creixent



x	f(x)
0,11	-1
0,33	0
1	1
3	2
9	3

13. Calculeu x en cada cas aplicant la definició de logaritme:

a) $\log_6(1/6)=x$	$x=-1$	$6^{-1}=1/6$
b) $\log_4 2=x$	$x=1/2$	$4^{1/2}=2$
d) $\log_5 125=x$	$x=3$	$5^3=125$
f) $\log_{1/8} 1=x$	$x=0$	$(1/8)^0=1$
c) $\log_3 81=x$	$x=4$	$3^4=81$
g) $\log_{1/5} 25=x$	$x=-2$	$(1/5)^{-2}=25$
d) $\log_3(1/9)=x$	$x=-2$	$3^{-2}=1/9$
h) $\log_{1/2}(1/16)=x$	$x=4$	$(1/2)^4=1/16$

14. Sabent que log2=0,301030 calculeu sense ajuda de la calculadora:

a) log40 $= \log(4\cdot 10) = \log(2^2\cdot 10) = \log 2^2+\log 10 = 2\cdot\log 2+\log 10 =$
$= 2\cdot 0{,}301030+1 = 1{,}602060$

b) log1,6 $= \log(16/10) = \log(2^4/10) = \log 2^4-\log 10 = 4\log 2-\log 10 =$
$= 4\cdot 0{,}301030-1 = 0{,}204120$

c) log 0,125 $= \log(125/1000) = \log 53/1000) = 3(\log 5 - \log 1000 = 3\log(10/2) - 3 =$
$= 3(\log 10-\log 2)-3 = 3-3\log 2-3 = -3\cdot 0{,}301030 = -0{,}903090$

15. Amb la calculadora trobeu els logaritmes següents:

a) $\log_2 23{,}721 = \dfrac{\log 23{,}721}{\log 2} = 4{,}5681$

b) $\log_3 25678{,}34561 = \dfrac{\log 2{,}3456}{\log 3} = 0{,}7760$

c) $\log_5 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 5} = -0{,}6027$

d) $\log_7 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 7} = -0{,}4985$

RECORDEU:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Per practicar

1. Envasem 276 litres d'aigua mineral en ampolles iguals. Escriviu la funció que relaciona el nombre d'ampolles que s'empren i la seva capacitat.

2. Un mòbil recorre un trajecte de 130 km a una velocitat constant. Escriviu la funció velocitat→temps. Calculeu el temps invertit a una velocitat de 50 km/h i a quina velocitat va si li costa 5 hores fer el recorregut.

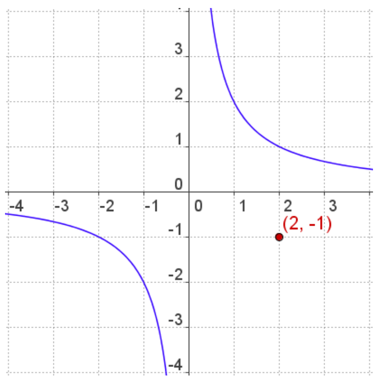
3. Un aixeta amb un cabal de 8 litres per minut tarda 42 minuts a omplir un dipòsit. Quant tardaria si el cabal fos de 24 l/min?. Escriviu la funció cabal→temps.

4. Calculeu les asímptotes de les funcions següents:

a) $f(x)=\frac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$

c) $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\frac{-x}{x+2}$

5. Escriviu l'equació de la funció la gràfica de la qual és una hipèrbola com la de la figura, amb el centre de simetria en el punt (2,-1).



6. Els costos d'edició de x exemplars d'un llibre els dóna y=21x+24 (x>0). Quant costa editar 8 exemplars?, i 80?. Escriviu la funció que indica el cost per exemplar, per molts exemplars que es publiquin, quin és el cost unitari com mínim?

7. En què se converteix després de 15 anys, un capital de 23000€ col·locat a intrès compost del 5,5% anual?

8. Un capital col·locat a interès compost al 2% anual, s'ha convertit en 3 anys en 9.550,87?. Quina era el capital inicial?

9. Un capital de 29.000 € col·locat a interès compost s'ha convertit al cap de 4 anys en 31.390,53 ? Quin és el rèdit (interès anual) a què ha estat col·locat?

10. Un capital de 7.000 €, col·locat a interès compost del 2% anual, s'ha convertit al cap d'uns anys en 8.201,61? Quants anys han transcorregut?

11. Quants anys ha d'estar col·locat cert capital, al 3% anual, perquè es dupliqui.

12. El període de desintegració del carboni 14 són 5.370 anys. En quina quantitat es converteixen 10 g al cap de 1.000 anys?

13. Quants anys han de passar perquè una mostra de 30 g de C14 es converteixi en 20,86 g? *(Període de desintegració del C14 5.370 anys).*

14. Una mostra de 60 g d'una substància radioactiva es converteix en 35,67 g en 30 anys. Quin és el període de desintegració?

15. La mida de cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 30 minuts. Si suposem que el cultiu té inicialment 5 millons de bacteris, Quantes hores necessitará per tenir 320 milions de bacteris?

16. La mida de cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 20 minuts, si al cap de 3 hores el cultiu té 576 milions de bacteris, quantes n'hi havia en l'instant inicial?

17. Calculeu el número:

a) el logaritme del qual en base 6 és 3.

b) el logaritme del qual en base 4 és −3.

c) el logaritme del qual en base 10 és 2.

d) el logaritme del qual en base 1/2 és −3.

e) el logaritme del qual en base 1/5 és 2.

18. En quina base?

a) el logaritme de 0,001 ès -3.

b) el logaritme de 243 ès 3.

c) el logaritme de 8 ès 1.

d) el logaritme de 1/81 ès -4.

e) el logaritme de 49 ès 2.

19. Calculeu mentalment:

a) el logaritme en base 2 de 32.

b) el logaritme en base 5 de 125.

c) el logaritme en base 3 de 1/9.

d) el logaritme en base 7 de 1.

e) el logaritme en base 6 de 216.

20. Si sabem que log2=0,3010 i que log3=0,4771, calculeu:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utilitzeu la calculadora per esbrinar el valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

Quan la x és en l'exponent

- Resoleu l'equació: $25^{2x-3}=125$
  $25=5^2$ i $125=5^3$, llavors $5^{2(2x-3)}=5^3$
  igualant els exponents $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$
- Calculeu *x* en $3^x=14$
  Prenent logaritmes: $\log 3^x=\log 14$
  $x\log 3=\log 14$ després $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

22. Resoleu les equacions exponencials:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calculeu el valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

Equacions amb logaritmes

Resoleu l'equació: $4\cdot\log x=2\cdot\log x+\log 4+2$
$4\cdot\log x - 2\cdot\log x=\log 4+\log 100$
$2\cdot\log x = \log 400 \quad \log x^2=\log 400$
$x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$

24. Aplicant les propietats dels logaritmes resoleu les equacions:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2}+2\cdot\log\dfrac{x}{3}=3\cdot\log x-\log\dfrac{32}{9}$

25. Resoleu els sistemes:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x-3\cdot\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=70 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

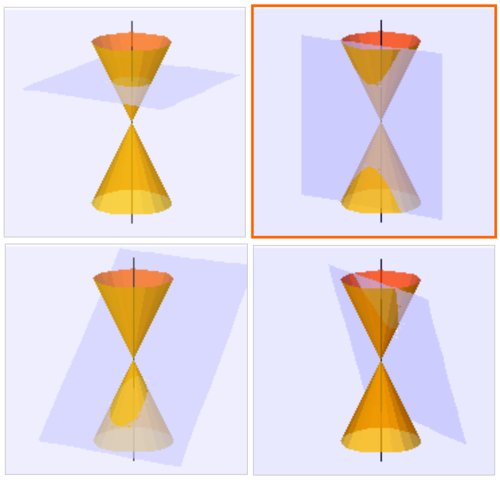
Per saber-ne més

Els càlculs de Franklin

Ara ja sabeu resoldre el problema proposat al principi del tema

1.000 lliures al **5%** anual durant **100** anys es converteixen en
$1.000\cdot1{,}05^{100}=131.825{,}67$

31.000 lliures al **5%** anual en **100** anys es converteixen en
$31.000\cdot1{,}05^{100}=4.076.539$ lliures



Altres hipèrboles

La hipèrbole és una cònica, junt amb la circumferència, l'el·lipse i la paràbola, són corbes que s'originen en tallar un con per un pla.

També és el llog geomètric dels punts la diferència de les seves distàncies amb dos de fixos, els focus, és constant.

El nombre e

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Aquesta expressió dóna lloc a un dels nombres més importants de les matemàtiques, el **nombre e**, irracional i de valor aproximat 2,7182818284590452...

Base de la funció exponencial $y = e^x$ i dels logaritmes neperians o naturals, apareix en nombroses situacions de la vida real.

Una de les corbes en la fórmula de les quals apareix el **nombre e** és la catenària, corba que forma una cadena quan es penja dels seus extrems. Podeu veure-la als cables de la línia elèctrica i en nombrosos elements arquitectònics, arcs, ponts... tot i que potser la podeu confondre amb una paràbola, ja que als voltants del vèrtex els valors són molt pròxims

Terratrèmols, música i xampú.

Què tenen en comú coses tan dispars? doncs precisament els logaritmes.

Quan es pretén representar mesures que prenen valors molt dispars, des de molt petits a molt grans, s'empra l'escala logarítmica. Alguns exemples en què s'utilitza:

- L'escala Richter, que mesura la intensitat dels terratrèmols.
- La intensitat del so en bels o decibels, o el mateix pentagrama.
- El ph d'una substància.
- La magnitud de les estrelles.

Quantes vegades és més gran la intensitat d'un terratrèmol de magnitud 7,9 en l'escala Richter que un de magnitud 5?

Les mesures de l'escala Richter són logaritmes decimals: 7,9 –5=2,9
$10^{2,9}=794$ vegades

Recordeu el més important

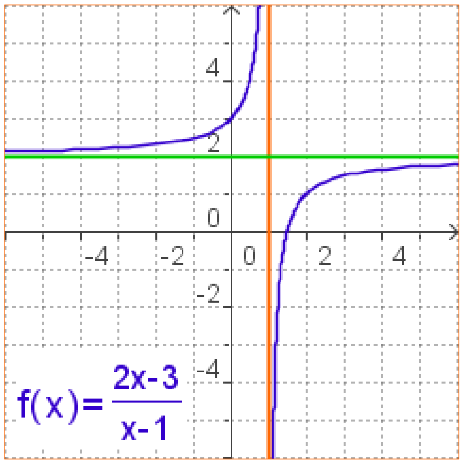
Funcions racionals

Són les que la seva expressió algebraica és el quocient entre dos polinomis.

✓ Una **funció de proporcionalitat inversa, y = k/x**, relaciona dues variables inversament proporcionals. La gràfica és una **hipèrbola**, és discontínua en x = 0, decreixent si k>0 i creixent si k<0.

Quan la gràfica d'una funció s'apropa cada vegada més a una recta, i es confonen, es diu que la recta és una **asímptota**.

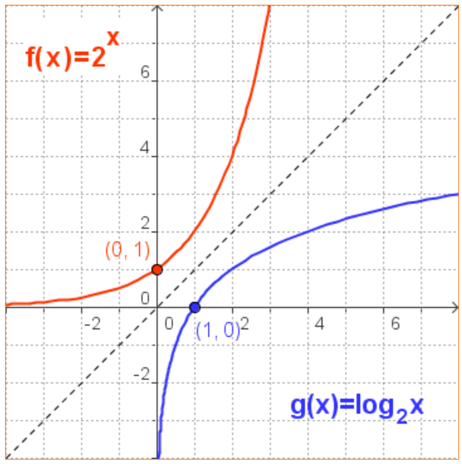
✓ Per calcular les asímptotes d'una funció racional en la qual el numerador i el denominador tenen el mateix grau, es fa la divisió, el quocient és l'asímptota horitzontal. Hi ha asímptota vertical en els punts que anul·len el denominador sempre que no anul·lin també el numerador.



Funcions exponencials

Són de la forma $\mathbf{y=a^x}$, amb a>0.

- El domini és IR. IR.
- És contínua.
- Si a > 1 és creixent i decreixent si 0 < a <1.
- Talla a l'eix OY en (0, 1) i passa per (1, a)
- L'eix OX és **asímptota** horitzontal.



Funcions logarítmiques

Són les que associen a cada nombre x el seu logaritme en una base concreta, a, $\mathbf{y=\log_a x}$.

- El domini són els reals positius i el recorregut és IR
- És contínua
- Si a > 1 és creixent i decreixent si 0 < a <1.
- Talla l'eix OX a (1, 0) i passa per (a, 1)
- L'eix OY és **asímptota** vertical.

✓ Donats dos números reals positius, **a** i **b** **(a≠1), anomenem logaritme en base a de b** al número que cal elevar **a** per obtenir **b.**

$\log_a b=c$ equival a $a^c=b$

Propietats dels logaritmes

- Logaritme del producte

  $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritme del quocient

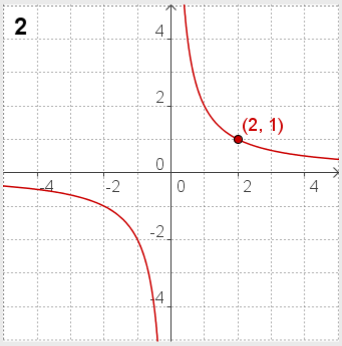
  $\log_a(b/c)=\log_a b-\log_a c$
- Logaritme d'una potència

  $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En qualsevol base:

  $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$

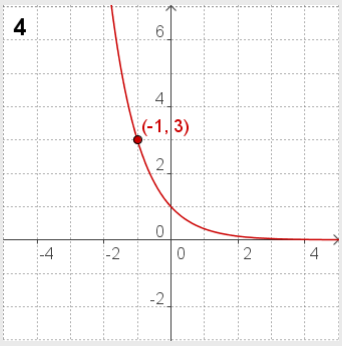
Autoavaluació

1. És l'expressió algebraica de la funció de proporcionalitat inversa en la qual al valor x=1,25 li correspon el valor y=4?



2. Escriviu l'expressió algebraica de la funció de la gràfica.

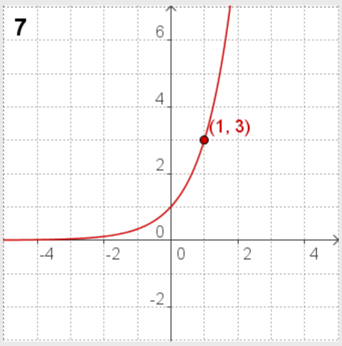
3. Calculeu les asímptotes de la funció $f(x)=\frac{-2x}{x-1}$.



4. Escriviu l'expressió algebraica de la funció exponencial de la gràfica

5. Calculeu en quina quantitat es converteix un capital de 9000€ a interès compost, col·locat al 4,5% anual durant 3 anys.

6. La població d'una espècie en extinció es redueix a la meitat cada any. Si al cap de 9 anys queden 12 exemplars, quina era la població inicial?



7. Escriviu l'expressió algebraica de la funció logarítmica que és la inversa de l'exponencial de la gràfica.

8. Calculeu $\log_5 \frac{1}{3125}$

9. Sabent que log3=0,4771 i sense fer servir la calculadora, calculeu log 8,1.

10. Amb la calculadora, trobeu el valor de x: $1{,}97^x=215$. Arrodoniu el resultat a centèsimes.

Solucions dels exercicis per practicar

1. y=276/x
2. y=130/x ; temps=2,6 ; v=26
3. 14 min; y=336/x
4. a) x=-3 y=2
   b) x=3 y=1
   c) x=0 y=2
   d) x=-2 y=-1
5. $y=\frac{2}{x-2}-1$
6. 8: 184€; 80: 1704€
   f(x)=21+24/x; 21€ mínim
7. 51347 €
8. 9000 €
9. 2%
10. 15 anys
11. 23 anys
12. 8,86 g
13. 3000 anys
14. 40 anys
15. 3 hores
16. 9 milions
17. a) 216 b) 1/256
    c) 100 d) 8 e) 1/25
18. a) 10 b) 3
    c) 8 d) 3 e) 7
19. a) 5 b) 3 c) -2
    d) 0 e) 3
20. a) 1,2040 b) 2,7090
    c) -0,7044 d) 1,3801 e) 1,8572
21. a) 4,8461 b) 5,3072
    c) 4,9025 d) 2,8598
    e) 3,9731
22. a) x=49/45 b) -3
    c) 13/6 d) 7/8 e) -1
23. a) x=0,827 b) x= 1,209
    c) x=1,989
24. a) x=-2 b) No té solució
    c) 80 i 20 d) ±3 (Només val +3)
25. a) x=100 y=0,1
    b) (x=50, y=20) (x=20, y=50)

Solucions de l'autoavaluació

1. f(x)= 5/x
2. f(x)= 2/x
3. x=1 y=-2
4. $f(x)=(1/3)^x = 3^{-x}$
5. 10270,50 €
6. 6144
7. $y=\log_3 x$
8. -5
9. 0,9084
10. 7,92

No us oblideu d'enviar les activitats al tutor ▶