Teorema de Hilbert-Schmidt-Fredholm

Sean V un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $T: V \to V$ operador autoadjunto y compacto. Entonces:

1. $\sigma(T)$ consta de una sucesión real que converge a cero.
2. $0 \in \sigma(T)$.
3. Si $\lambda \in \sigma(T)$, con $\lambda \neq 0$, entonces λ es un autovalor, con $\dim \ker(T - \lambda I) < \infty$.
4. Si escribimos $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \cup \{0\}$ con $\lambda_i \neq 0, \forall i$ y si V_{λ_i} denota al subespacio propio asociado a λ_i, entonces $V = \ker(T) \oplus \overline{\oplus V_{\lambda_i}}$ donde $\oplus$ denota suma directa.
5. Existe un sistema ortonormal completo de V $(e_i)_{n=1}^{\infty}$ tal que,

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ & & & \lambda_n & 0 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

   Y cada $\lambda_i \neq 0$ aparece una cantidad finita de veces.

6. Para cada $v \in V$, v es suma de autovectores de T,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (v, e_i) e_i$$

7. $\|T\|$ o $-\|T\|$ pertenecen a $\sigma(T)$.
8. Sea P_j la proyección ortogonal sobre V_{λ_i}; esto es

$$\begin{cases} v \; sii \; v \in V_{\lambda_i} \\ v \; sii \; v \in \left(V_{\lambda_i}\right)^{\perp} \end{cases}$$

   Entonces cuando $j \to \infty$,

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \right\|_{\mathcal{B}(V)} \to 0$$