

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Resoldre equacions de segon grau completes i incompletes.
- Resoldre equacions biquadrades i d'altres que es poden reduir a una de segon grau.
- Resoldre sistemes d'equacions lineals fent servir els diferents mètodes.
- Resolver Resoldre sistemes d'equacions de segon grau.
- Aplicar el llenguatge de l'àlgebra a la resolució de problemes.

Abans de començar.

1. Equacions de segon grau.....pàg. 58
 Completes
 Incompletes
 Discriminant i solucions
 Biquadrades
 Racionals
 Irracionals
2. Sistemes d'equacions lineals.....pàg. 61
 Solució d'un sistema
 Sistemes compatibles
 Mètode de substitució
 Mètode d'igualació
 Mètode de reducció
3. Sistemas de segundo grado.....pàg. 63
 Sistema $ax+by=c$ $xy=d$
 Sistema $a_0x^2+b_0y^2=c_0$ $a_1x+b_1y=c_1$
4. Aplicacions pràctiques.....pàg. 64
 Resolució de problemes

Exercisís per practicar

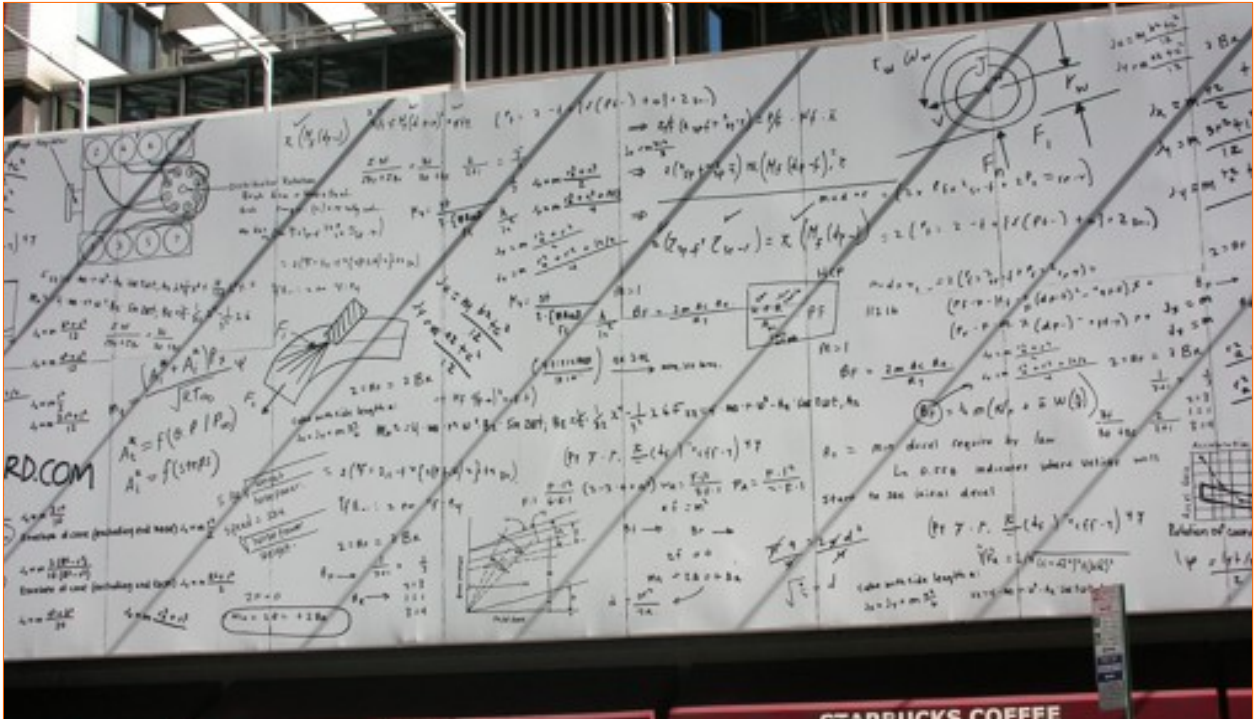
Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar



Molts problemes pràctics a la vida real condueixen a la resolució d'una equació o d'un sistema d'equacions. Traduir al llenguatge de l'àlgebra és imprescindible en aquests casos; el llenguatge algebraic ens serveix per expressar amb precisió relacions difícils de transmetre amb el llenguatge habitual.

Proveu a fer a algun amic el joc que proposa el mag, per endevinar el número pensat n'hi ha prou restant 1000 al resultat que us doni i dividir-lo per 100, com podeu comprovar si plantegeu una equació:

Penseu un número x
 Dupliqueu-lo $2x$
 Afegiu-hi 5 unitats $2x+5$
 Multipliqueu-lo per 5 $5 \cdot (2x+5)$
 Sumeu-hi 75 unitats $5 \cdot (2x+5) + 75$
 Multipliqueu-lo tot per 10 $10 \cdot [5 \cdot (2x+5) + 75]$
 $10 \cdot [5 \cdot (2x+5) + 75] =$ Resultat
 $10 \cdot (10x+25+75) =$ Resultat
 $10 \cdot (10x+100) =$ Resultat
 $100x+1000 =$ Resultat
 $x = (\text{Resultat} - 1000) / 100$

Amb àlgebra és fàcil

Penseu un número, dupliqueu-lo, afegiu-hi 5 unitats, multipliqueu-lo per 5, sumeu-hi 75 unitats i multipliqueu-lo tot per 10.

Ara digueu-me el resultat i endevinaré el vostre número.

Equacions i sistemes

1. Equacions de segon grau

Les equacions de segon grau tenen la forma:

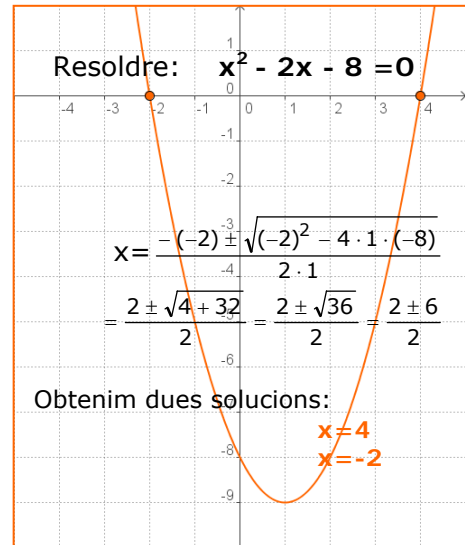
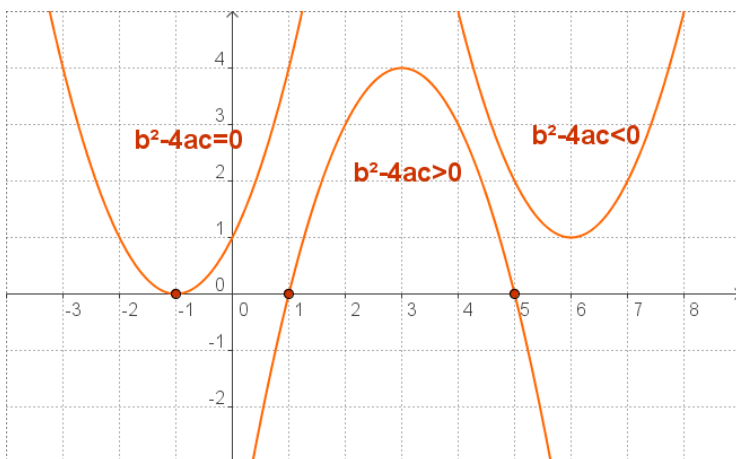
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es resolen aplicant la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución, según sea $b^2 - 4ac$, el llamado discriminante.

- $b^2 - 4ac > 0$ Hi ha dues solucions.
- $b^2 - 4ac = 0$ Hi ha una solució doble: $x = -b/2a$
- $b^2 - 4ac < 0$ No hi ha solució.



Com s'obté la fórmula?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Passem c a l'altre membre:
 $ax^2 + bx = -c$

Multipliquem per 4a:
 $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Sumem b^2 :
 $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Tenim un quadrat perfecte:
 $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extraiem l'arrel:
 $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Aillem x:
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas

Si b o c, o tots dos són zero direm que l'equació és incompleta.

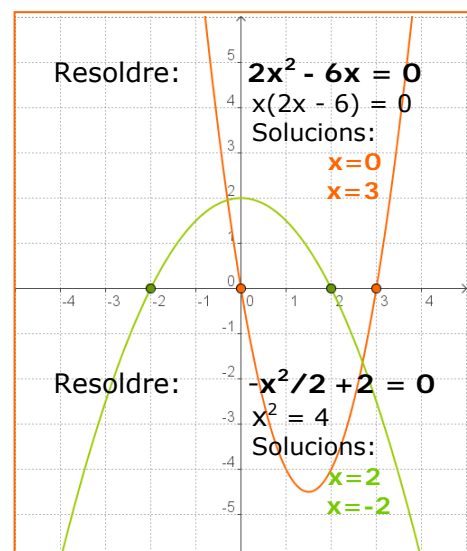
En aquests casos, seguir els passos que s'indiquen a continuació és més útil que no pas aplicar la fórmula.

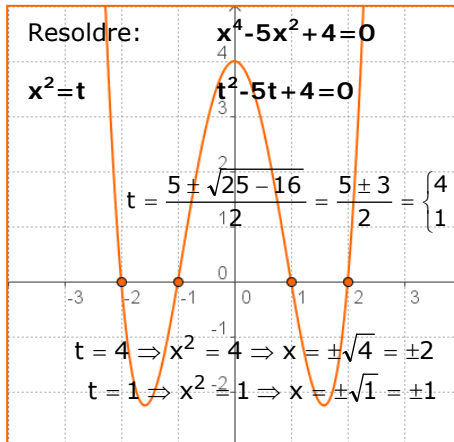
- Si $b=0$ $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$

$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

 - Si $-c/a > 0$ hi ha dues solucions
 - Si $-c/a < 0$ no hi ha solució.
- Si $c=0$ $ax^2 + bx = 0$

Traiem el factor comú de x: $x(ax+b) = 0$
 $\Rightarrow x=0, x=-b/a$ són les dues solucions.





Equacions biquadrades

Són equacions que presenten la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se'ls anomena biquadrades.

Per resoldre-les n'hi ha prou amb fer $x^2 = t$, obtenint una equació de segon grau: $at^2 + bt + c = 0$, en la qual

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

A continuació veiem algunes equacions que es transformen en una de segon grau. Als exercicis resolts podeu veure més exemples.

Resoldre: $x - \frac{2}{1-x} = 4$

Traiem denominadors:
 $x(1-x) - 2 = 4(1-x)$

Operem:
 $x - x^2 - 2 = 4 - 4x$

Resolem:
 $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Comprovem les solucions:
 $x = 3$
 $x = 2$
 Són vàlides totes dues.

Racionals

Una equació que té la incògnita en el denominador

El procés per resoldre-la és treure denominadors, operar i resoldre l'equació final.

Cal eliminar de les solucions els valors que anul·lin el denominador, ja que en aquest cas no seria vàlida.

Resoldre: $\sqrt{x-1} + x = 7$

Deixem l'arrel en un costat:
 $\sqrt{x-1} = 7 - x$

Elevem al quadrat:
 $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2$
 $x-1 = 49 - 14x + x^2$

Resolem: $x^2 - 15x + 50 = 0$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$$

Comprovem les solucions:
 $x = 10$ no és vàlida
 $x = 5$ és la solució

Irracionals

Una equació que té la incògnita dins d'una arrel és anomenada irracional.

El procés per resoldre-la és, aïllar l'arrel, elevar al quadrat els dos termes de la igualtat, operar i resoldre l'equació final.

En elevar al quadrat solen introduir-se solucions "estranyes" per la qual cosa cal comprovar-les en l'equació de partida.

EXERCICIS resolts

1. Resoleu les equacions:

$$\text{a) } x^2 + 12x + 32 = 0 \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

2. Resoleu les equacions:

$$\text{a) } 2x^2 + 5x = 0 \quad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0, x=-5/2$$

$$\text{b) } 2x^2 - 32 = 0 \quad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

3. Calculeu el valor de m perquè l'equació $x^2+mx+9=0$ tingui una solució doble.

El discriminant $\Delta=b^2-4ac$ ha de ser 0, $m^2 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow m^2=36$ i $m=\pm 6$
 Si $m=6$, $x^2+6x+9=0$ i la solució $x=-3$; si $m=-6$, $x^2-6x+9=0$ i la solució $x=3$

4. Resoleu les equacions:

$$\text{a) } x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^4 + 9x^2 - 162 = 0 \quad t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sense sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

5. Resoleu les equacions:

$$\text{a) } \frac{9-x}{1+3x} + \frac{3}{1-x} = -2 \quad (9-x)(1-x)+3(1+3x)=-2(1+3x)(1-x)$$

$$5x^2 - 3x - 14 = 0 \quad 9-9x-x+x^2+3+9x=-2+2x-6x+6x^2$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} 2 \\ -7/5 \end{cases}$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

$$\text{b) } \frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1 \quad (x-2)(1-x)-8 \cdot 5(x+1)=5(x+1)(x-2)$$

$$6x^2 + 32x + 32 = 0 \quad x-2-x^2+2x-40x-40=5x^2+5x-10x-10$$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

6. Resoleu les equacions:

$$\text{a) } x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0 \quad x + 1 = \sqrt{5x+1}$$

$$(x+1)^2 = (\sqrt{5x+1})^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=3$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

$$\text{b) } \sqrt{3x+4} + 2x = 4 \quad \sqrt{3x+4} = 4 - 2x$$

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2 \Rightarrow 3x+4 = 16 - 16x + 4x^2$$

$$4x^2 - 19x + 12 = 0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

Només val la solució $x=3/4$

2. Sistemes d'equacions

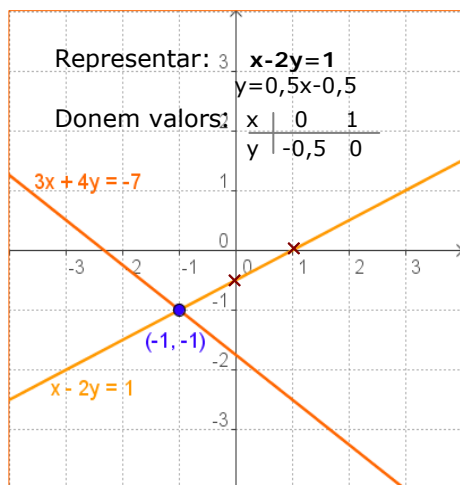
Un sistema d'equacions lineals és un conjunt d'equacions que s'han de satisfer simultàniament.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \text{ són nombres reals}$$

La **solució** d'un sistema és un parell de valors (x, y) que verifiquen les dues equacions.

Si dos o més sistemes tenen la mateixa solució s'anomenen **sistemes equivalents**

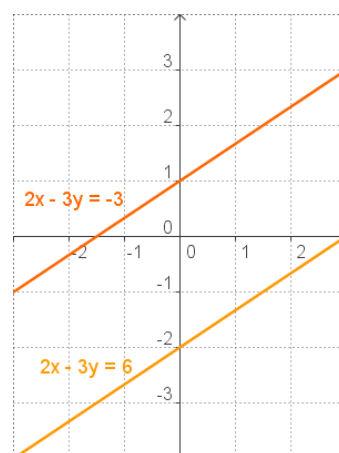
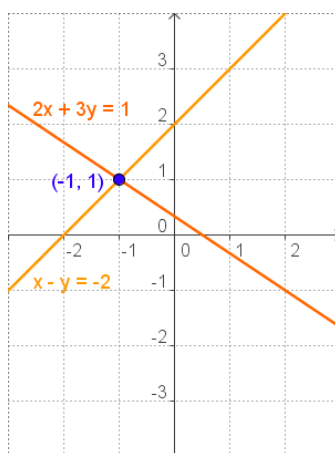
Els sistemes que tenen solució s'anomenen **compatibles** i els que no en tenen, **incompatibles**.



En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada equació representa una recta en el pla.

Discutir un sistema és estudiar la situació d'aquestes rectes en el pla, que poden ser:

- **Secants:** el sistema té solució única; s'anomena **compatible determinat**.
- **Coincidents:** el sistema té solucions infinites; és **compatible indeterminat**.
- **Paral·leles:** el sistema no té solució; s'anomena **incompatible**.



Per resoldre un sistema d'equacions utilitzem qualsevol dels tres mètodes següents:

Mètode de substitució

Consisteix en aïllar una de les incògnites en una equació del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra. S'arriba així a una equació de primer grau amb una sola incògnita; trobada aquesta es calcula l'altra.

Mètode d'igualació

Consisteix en aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. S'igualen les dues expressions que en resulten i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita.

Mètode de reducció

Consisteix en multiplicar una o les dues equacions per algun nombre de manera que obtinguem un sistema en què els coeficients de x o de y siguin iguals i de signe contrari, per eliminar la incògnita esmentada en sumar les dues equacions.

Resoldre: $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Per **SUBSTITUCIÓ**
Aïllem x en la 2a equació i substituïm en la 1a: $x = 1 + 2y$
 $3(1 + 2y) + 4y = -7$
 $3 + 6y + 4y = -7 \Rightarrow 10y = -10$
 $y = -1$
 $x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$

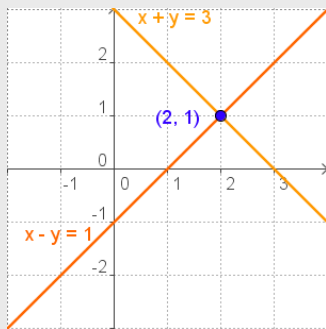
Per **IGUALACIÓ**
Aïllem x en ambdues equacions i igualem: $\frac{-4y - 7}{3} = 1 + 2y$
 $-4y - 7 = 3(1 + 2y)$
 $-4y - 6y = 3 + 7 \Rightarrow -10y = 10$
 $y = -1$
 $x = -1$

Per **REDUCCIÓ**
Multipliquem per 2 \rightarrow $\begin{array}{r} 3x + 4y = -7 \\ 2x - 4y = 2 \\ \hline 5x = -5 \end{array}$
 Sumant: $5x = -5$
 Després: $x = -1$
 I substituïnt: $y = -1$

EXERCICIS resolta

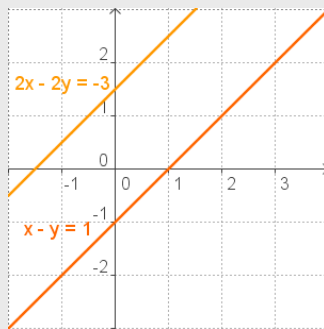
7. Representeu les rectes corresponents i discutiu els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



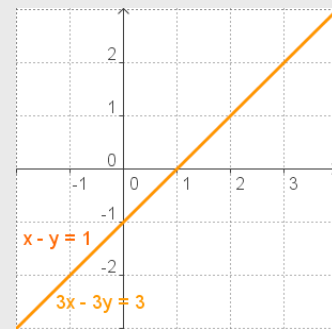
Compatible determinat

b) $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Incompatible

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Compatible indeterminat

8. Resoleu per substitució:

a) $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

Aïllem x en la 1a equació: $x = -25 - 4y$
 substituïm en la 2a: $-10(-25 - 4y) - 5y = 5 \Rightarrow 250 + 40y - 5y = 5$
 $35y = -245 \Rightarrow y = -7$
 $x = -25 - 4 \cdot (-7) = 3$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

Aïllem y en la 2a equació: $y = -4x + 43$
 substituïm en la 1a: $3x + 5(-4x + 43) = 45 \Rightarrow 3x - 20x + 215 = 45$
 $-17x = -170 \Rightarrow x = 10$
 $y = -4 \cdot 10 + 43 = 3$

9. Resoleu per igualació:

a) $\begin{cases} -4x + y = 20 & y = 20 + 4x \\ 6x - 9y = 0 & y = 6x / 9 \end{cases}$

$20 + 4x = \frac{6x}{9} \Rightarrow 180 + 36x = 6x$
 $30x = -180 \Rightarrow x = -6$
 $y = -36/9 = -4$

b) $\begin{cases} -3x - 4y = 31 & x = (31 + 4y) / -3 \\ 5x - 9y = 11 & x = (11 + 9y) / 5 \end{cases}$

$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5} \Rightarrow 5(31 + 4y) = -3(11 + 9y)$
 $155 + 20y = -33 - 27y \Rightarrow 47y = -188 \Rightarrow y = -4$
 $x = (11 - 36) / 5 = -5$

10. Resoleu per reducció:

a) $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

$5x - 10y = 25$
 Es multiplica per 5 $\rightarrow 40x + 10y = 20$
 Sumant: $45x = 45$
 $x = 1$ $y = -2$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

Es multiplica per $-7 \rightarrow -35x - 21y = -147$
 Es multiplica per 5 $\rightarrow 35x + 40y = 185$
 Sumant: $19y = 38$
 $y = 2$ $x = 3$

11. Resoleu:

$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$

traient denominadors i simplificant la 2a equació, el sistema es converteix en un equivalent.

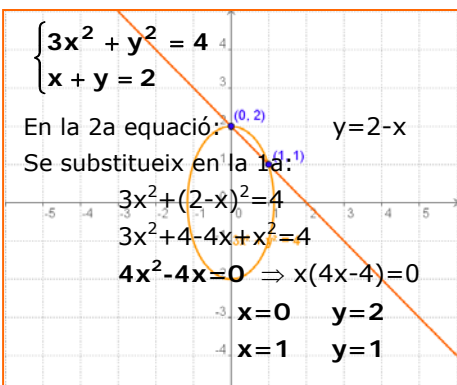
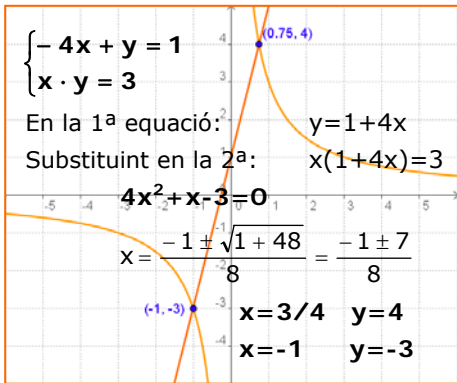
Per REDUCCIÓ:

$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ -3x + 3y = -12 \\ 2x = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 5$ $y = 1$

3. Sistemes de segon grau



Són sistemes en els quals una o les dues equacions no són lineals. Per resoldre'ls apliquem els mètodes ja coneguts per a equacions de 2n grau i sistemes lineals. Vegem alguns exemples.

- Tipus:
$$\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$$

- Tipus:
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Per resoldre sistemes d'aquest tipus s'aïlla la x o la y a una equació i se substitueix a l'altra. Es redueix i es resol l'equació que queda.

Finalment se substitueixen els valors trobats a l'equació aïllada per calcular-ne l'altra incògnita.

EXERCICIS resoltos

12. Resoleu:

a)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$$

En la 1a equació: $x = y - 1$
 En la 2a equació: $(y - 1)y = 20$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = 24/y$
 En la 1a equació: $48/y + 3y = 30$

$$3y^2 - 30y + 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$$

13. Resoleu::

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = -y - 1$
 En la 1a equació: $(-y - 1)^2 + y^2 = 41$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 = 41$$

$$2y^2 + 2y - 40 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = (-1 - 3y)/2$
 En la 1a equació: $\frac{(-1 - 3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$

$$1 + 9y^2 + 6y - 8y^2 = 28 \quad y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$$

Equacions i sistemes

4. Resolució de problemes

Per resoldre un problema mitjançant una equació o un sistema d'equacions, cal traduir al llenguatge algebraic les condicions de l'enunciat i després resoldre l'equació o el sistema plantejat.

A continuació podeu veure alguns exemples:

- ✓ En una reunió cada assistent saluda tots els altres. Si el nombre de salutacions que s'intercanvien és 28. Quantes persones assisteixen a la reunió?

x = núm. assistents

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \Rightarrow x^2 - x = 56$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Obtenim $x = -14/2 = -7$ y $x = 16/2 = 8$
La solució negativa no és vàlida ja que es tracta de nombre de persones, després hi assisteixen 8 persones.

- ✓ Dues persones es troben tenint cada una un capital: L'una diu a l'altra "Si em dones del que tens 3 unitats les afegeixo al que tinc i en tindrem totes dues igual"; l'altra em replica: "i tu em dones del que tens 6 unitats les afegeixo al que tinc i en tindrà el doble del que et queda". Quant en té cadascuna?

A en té x $\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$

B en té y

Resolem per reducció:

$$\begin{array}{r} -x + y = 6 \\ 2x - y = 18 \\ \hline x = 24 \\ y = 6 + x = 30 \end{array}$$

- ✓ Es vol tancar una finca rectangular, un dels costats de la qual dona a un riu. Si l'àrea de la finca és de 2000 m² i els tres costats s'han de tancar mesuren 140m. Quines són les dimensions de la finca?

Dimensions: x (ample), i (llarg)

$$\begin{cases} 2x + y = 140 \\ x \cdot y = 2000 \end{cases}$$

En la 1ª ecuació: $y = 140 - 2x$
Substituint en la 2ª: $x \cdot (140 - 2x) = 2000$
Resolem l'ecuació: $2x^2 - 140x + 2000 = 0$
 $x = 50 \quad y = 40$
 $x = 20 \quad y = 100$

Per resoldre problemes

- 1º) Entendre l'enunciat.
- 2º) Identificar les incògnites.
- 3º) Traduir a llenguatge algebraic.
- 4º) Resoldre l'equació o sistema.
- 5º) Comprovar la solució.

Nombre d'assistents: **x**

Cada un saluda tots els altres, que són: **x-1**
La salutació A → B és el mateix que la salutació B → A, per tant, el nombre total de salutacions:

$$x \cdot (x-1) / 2$$



Comprovació:
8 persones, cada una saluda a les altres 7;
 $8 \cdot 7 = 56$ i la meitat 28.

La persona A té: **x**
La persona B té: **y**

	B da 3 a A	A da 6 a B
A en té x	x+3	x-6
B en té x	y-3	y+6
	Les dues igual	B dobla d'A

Parla A: **x+3 = y-3**
Parla B: **y+6 = 2(x-6)**

Comprovació:

	B en fa 3 a A	A en fa 6 a B
A: x=24	24+3=27	24-6=18
B: y=30	30-3=27	30+6=36
	Les dues igual	B doble d'A

x: ample
y: llarg

Perímetre per tancar: **2x+y=140 m**
Superfície (base x altura): **x·y=2000 m²**

Comprovació:
 $x=50 \quad y=40 \quad x \cdot y = 50 \cdot 40 = 2000$
 $x=20 \quad y=100 \quad x \cdot y = 20 \cdot 100 = 2000$



Per practicar

1. Resoleu les equacions:

a) $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$

b) $3x^2 + 8x + 14 = -5x$

c) $(x-6)(x-10)=60$

d) $(x+10)(x-9)=-78$

2. Resoleu les equacions:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$

c) $x^4 - 81 = 0$

d) $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Resoleu les equacions:

a) $\frac{9}{2-x} + \frac{4}{2-3x} = 5$

b) $\frac{5+x}{2+2x} - \frac{2}{4-3x} = 2$

c) $3-x - \frac{6x+6}{7x+5} = 1$

d) $\frac{3+x}{3x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 5$

4. Resoleu les equacions:

a) $2\sqrt{9x} - x = 9$

b) $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$

c) $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Resoleu els sistemes:

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = \frac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Resoleu els sistemes:

a) $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. El producte de dos nombres enters és 192 i la seva diferència 4. Quins nombres són?

8. La suma dels quadrats de dos nombres naturals consecutius és 342, quins són?

9. En sumar una fracció de denominador 3 amb el seu invers s'obté $109/30$, quina és la fracció?

10. El quadrat d'un núm. més 6 és igual a 5 vegades el nombre, quin nombre és?

11. Busqueu un número positiu que 6 vegades la seva quarta potència més 7 vegades el seu quadrat sigui igual a 124.

12. L'edat d'en Joan era fa 9 anys l'arrel quadrada de la que tindrà d'aquí 11 anys. Determineu-ne l'edat actual.

13. El numerador d'una fracció positiva és 4. Si se sumen 9 unitats al denominador, el valor de la fracció disminueix en una unitat. Quin es el denominador original?

14. Dues aixetes brollant juntes tarden a omplir un dipòsit 2 hores. Quant temps necessitaran separatament si una de les aixetes tarda 3 hores més que l'altra?

PISTA: Si una aixeta tarda x hores en omplir el dipòsit en una hora omple $1/x$ del dipòsit.

15. Trobeu m perquè $x^2 - mx + 121 = 0$ tingui una solució doble.

16. Dos nombres sumen 400 i el més gran és igual a 4 vegades el més petit. Trobeu-los.

17. La Mercé va pagar 272 € per 4 entrades per a un concert i 8 entrades per al teatre, i la Lluïsa va pagar 247 € per 9 entrades per a un concert i 3 entrades per al teatre. Quant costava cada entrada?

Equacions i sistemes

18. Dos nombres sumen 241 i la seva diferència és 99. Quins nombres són?
19. Dos números sumen 400 i el major és igual a 4 vegades el menor, quins nombres són?
20. En Pere té 335 € en bitllets de 5€ i de 10€; si en total té 52 bitllets, quants en té de cada classe?
21. En un hotel hi ha 67 habitacions entre dobles i senzilles. Si el nombre total de llits és 92, quantes habitacions hi ha de cada tipus?
22. Es vol barrejar vi d'1 €/litre amb vi de 3 €/litre per obtenir una mescla d'1,2 €/litre. Quants litres haurem de posar de cada preu per obtenir 2000 litres de mescla?
23. En un magatzem hi ha dos tipus de làmpades, les de tipus A que utilitzen 2 bombetes i les de tipus B que utilitzen 7 bombetes. Si en total al magatzem hi ha 25 làmpades i 160 bombetes, quantes làmpades hi ha de cada tipus?
24. En un parc d'atraccions pujar a la sínia costa 1 € i pujar a la muntanya russa costa 4 €. L'Anna va pujar un total de 13 vegades i es va gastar 16 €. Quantes vegades va pujar a cada atracció?
25. En un corral hi ha ovelles i gallines en nombre de 77 i si comptem les potes n'obtenim 274 en total. Quantes ovelles i quantes gallines hi ha?
26. Trobeu un nombre de dues xifres sabent que la suma d'aquestes és 7 i la diferència entre el nombre i el que resulta en intercanviar-les és 27.

PISTA: Si x és la xifra de les desenes i i és la xifra de les unitats, el nombre és $10x+y$, i el que resulta en intercanviar les xifres és $10y+x$
27. La suma de dos nombres naturals és 24 i el seu producte 135, quins nombres són?
28. Calculeu les longituds dels costats d'un rectangle sabent que la diagonal mesura 58 cm i el costat major supera en 2 cm el menor.
29. La suma de dos nombres naturals és 13 i la dels seus quadrats és 109, trobeu els nombres.
30. La diferència entre dos nombres enters és 6 i el seu producte 247. Quins nombres són?
31. La suma de les edats de dues persones és 18 anys i el producte 77. Quina edat té cadascuna?
32. Calculeu les longituds dels costats d'un triangle rectangle de perímetre 48 cm, si la suma dels catets és 28 cm.
33. El producte de les dues xifres d'un número és 14 i la suma de la xifra de les unitats amb el doble de la de les desenes és 16. Trobeu el nombre.
34. La suma de les àrees de dos quadrats és 100 cm^2 i la suma dels seus perímetres és 56, quant mesuren els costats?
35. En un triangle isòsceles els costats iguals mesuren 13 cm i l'altura és 2 cm més llarga que la base. Calculeu-ne l'àrea.

“Per resoldre un problema referent a nombres o relacions abstractes de quantitats, no hi ha res com traduir aquest problema de l'anglès o una altra llengua al llenguatge de l'àlgebra”

Newton (Aritmetica Universalis)



"L'inventor" de l'àlgebra

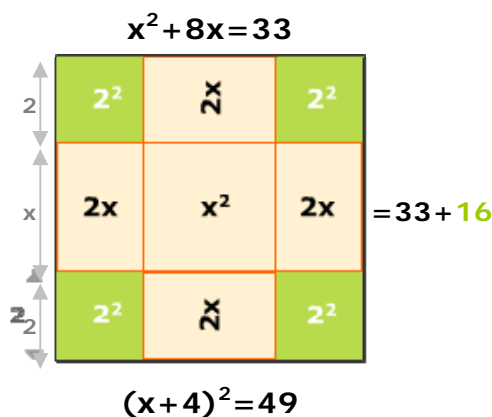
Al-Hwārizmī, que va viure aproximadament entre els anys 780-850 i va treballar a la Casa de la Saviesa a Bagdad.

Cinc de les seves obres han arribat fins a nosaltres, entre elles al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala, el primer tractat d'àlgebra conegut.

Al-Hwārizmī classifica les equacions en sis tipus diferents i resol cada cas separatament fent servir mètodes geomètrics, com el de l'animació.

Classificació de les equacions segons Al-Jwarizmi

- quadrat de la cosa=cosa
 $ax^2=bx$
- quadrat de la cosa=núm.
 $ax^2=c$
- cosa=núm.
 $ax=b$
- quadrat de la cosa+cosa=núm.
 $ax^2+bx=c$
- quadrat de la cosa+núm.=cosa
 $ax^2+c=bx$
- quadrat de la cosa=cosa+núm.
 $ax^2=bx+c$



$$x^2 + 8x = 33$$

$$x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x = 33$$

$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 33 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 49$$

$$x + 4 = 7 \quad x + 4 = -7$$

$$x = 3 \quad x = -11$$



Per què la x?

Els àrabs anomenaven la incògnita "shay" (cosa). La primera traducció es va fer al llatí a Espanya (Roberto de Chester, Toledo, 1145) i, com que la paraula àrab cosa sona molt similar a la x medieval, la van anomenar d'aquesta manera i encara avui continua anomenant-se'n. A Itàlia es va traduir com a cusi, es va abreujar com a co i els que resolien equacions eren anomenats *cosistas*.



Recordeu el més important

Equacions de segon grau

- Completes: $ax^2 + bx + c = 0$

Es resolen amb la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Incompletes: $ax^2 + c = 0$

S'aïlla $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Incompletes: $ax^2 + bx = 0$

2 solucions: $x=0, x=-b/a$

Sistemes d'equacions lineals

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ És un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada equació és una recta que podem representar en un sistema cartesià. El punt de tall (x,y) si existeix, serà la **solució** del sistema.

Per resoldre un sistema emprarem els mètodes de:

Substitució: Consisteix en aïllar una de les incògnites en una equació del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra.

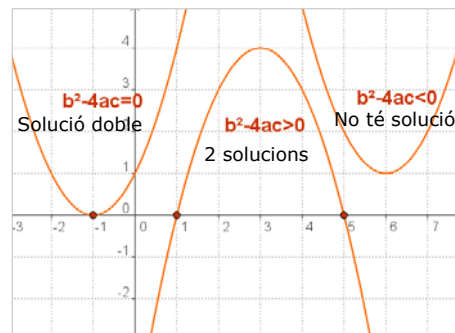
Igualació: Consisteix en aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. S'igualen les dues expressions que en resulten.

Reducció: Consisteix en multiplicar una o les dos equacions per algun número de modo que obtengamos un sistema en que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario, para eliminar dicha incògnita al sumar las dos ecuaciones.

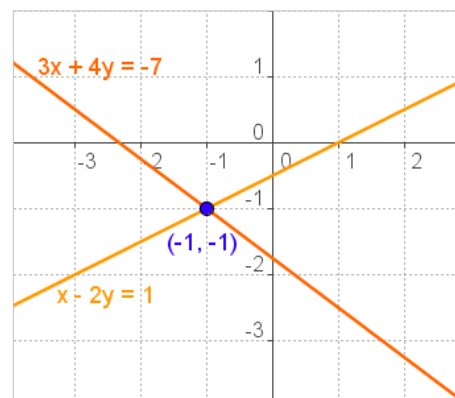
Sistemes de 2n grau

Són sistemes en els quals una de les equacions o les dues són de segon grau en una de les incògnites o en les dues.

Habitualment es resolen aïllant una de les incògnites a l'equació de primer grau i substituint-la a l'altra, cosa que dona lloc a una equació de 2n grau.



Segons sigui el signe del discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$ l'equació tindrà dues solucions, una o cap solució real.



- Si dos o més sistemes tenen la mateixa solució s'anomenen sistemes **equivalents**
- Un sistema és **compatible** si té solució, i **incompatible** si no la té.

Per resoldre problemes

- ✓ Entendre e' enunciat.
- ✓ Identificar les incògnites.
- ✓ Traduir a llenguatge algebraic.
- ✓ Resoldre l'equació o sistema.
- ✓ Comprovar la solució.



1. Resoleu l'equació: $3x^2 + 15x = 0$
2. Resoleu l'equació: $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.
3. Resoleu l'equació: $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$.
4. Resoleu l'equació: $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$
5. Resoleu el sistema:
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$$
6. Resoleu el sistema:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
7. Busqueu dos nombres naturals consecutius que la suma dels seus quadrats sigui 1105.
8. Tenim 13 € en monedes de 2 € i de 50 cèntims. Si en total hi ha 14 monedes, Quantes n'hi ha de cada tipus?
9. Per tancar una finca rectangular de 720 m² s'han utilitzat 112 m de tanca. Calculeu les dimensions de la finca.
10. Escriviu una equació de segon grau que la suma de les seves dues solucions sigui 7 i el producte 12.

Equacions i sistemes

Solucions dels exercicis per practicar

- a) $x=5$, $x=-31/6$ b) $x=-2$, $x=-7/3$
c) $x=16$, $x=0$ d) $x=21$, $x=1$
- a) $x=\pm\sqrt{12}$ b) $x=\pm 2$
c) $x=\pm 3$ d) $x=0$, $x=\pm 3$
- a) $x=5$, $x=-2$ b) $x=19/9$, $x=0$
c) $x=1$, $x=-4/7$ d) $x=0$, $x=-9/11$
- a) $x=9$ b) $x=-1/8$, $x=-1/2$
c) $x=3$, $x=9/4$ No és vàlida
- a) $x=7$ $y=8$ b) $x=1$ $y=5$
c) $x=4$ $y=2$ d) $x=4$ $y=0$
- a) $x=-3$ $y=3$; $x=-9/2$ $y=2$
b) $x=-5$ $y=-8$; $x=-4$ $y=-10$
c) $x=-5$ $y=3$; $x=-1$ $y=1$
d) $x=-4$ $y=7$; $x=7$ $y=-4$
- 12 y 16 ó -16 y -12
- 18 y 19
- 3/10
- 3 y 2
- El denominador és 3
- 14 anys
- 24 (La solució negativa no val)
- Una aixeta 3 h, i l'altra 2 h
- 22 i -22
- 320 i 80
- Teatre: 25€, concert: 18€
- 170 i 71
- 80 i 320
- 15 de 10€ i 37 de 5€
- 25 de dobles i 42 de senzilles
- 1800 litres d'1€ i 200 litres de 3€
- 3 de tipus A i 22 de tipus B
- 12 vegades a la sinya i 1 a la muntanya
- 17 gallines i 60 ovelles
- El núm. 52
- 9 i 15
- 40 i 42
- 10 i 3
- 13, 19 i -13,-19
- 11 i 7
- Els catets 12 i 16, la hipotenusa 20
- 72
- 1 i 8
- altura=12, base=10; àrea 60

Solucions de l'autoavaluació

- $x=0$, $x=-5$
- $x = \pm 6$, $x = \pm 1$
- $x=8$; $x=15$
- $x = \pm 8$
- $x=30$ $y=8$
- $x=6$ $y=9$
 $x=2$ $y=1$
- 23 i 24
- 4 de 2€ i 10 de 0,50€
- 36 m x 20 m
- $x^2 - 7x + 12=0$
Solucions 3 y 4

No us oblideu d'enviar les activitats al tutor o tutora ►