- **Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss-Jordan y clasifíquelo usando el Teorema de Rouché Frobenius** $\begin{cases} x-y-z+2w=1 \\ 2x-2y-z+3w=3 \\ -x+y-z \ = \text{-}3 \end{cases}$

<u>Resolución</u>

Para calcular los rangos de A y A' usaremos el método de Gauss-Jordan.
Para ello aplicaremos operaciones elementales sobre las filas de A' hasta obtener el máximo número de vectores canónicos columnas distintos.

La matriz ampliada del sistema es A' = $\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{rrrr|r l}
1 & -1 & -1 & 2 & 1 & \\
2 & -2 & -1 & 3 & 3 & F_2+F_1(-2) \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -3 & F_3+F_1 \\
\hline
1 & -1 & -1 & 2 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & F_1+F_2 \\
0 & 0 & -2 & 2 & -2 & F_3+F_2(2) \\
\hline
1 & -1 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 &
\end{array}$$

Como r (A) = r (A') = 2 < n = 4 (número de incógnitas), por el Teorema de Rouche Frobenius, concluimos que el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto tiene infinitas soluciones

El sistema equivalente es: $\begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}+0\mathrm{z}=0 \\ 0\mathrm{x}+0\mathrm{y}+\mathrm{z}-\mathrm{w}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}=0 \\ \mathrm{z}-\mathrm{w}=1 \end{cases}$

En este caso se tienen r = 2 incógnitas principales, las cuales dependen de los infinitos valores que les asignemos a las n - r = 4 – 2 = 2 variables libres.

Las variables principales son las correspondientes a los pivotes, es decir: **"x"** y **"z",** mientras que las libres son "**y**" y **"w"**.

El conjunto solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones equivalente para las variables principales en términos de las libres. En este caso resolvemos para "x" y para "z" en términos de "y" y "w", incógnitas libres ya que pueden tomar cualquier valor real.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1 + w \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathbf{C_s} = \{ (y, y, 1+w, w) \ / \ y, w \in \Re \}$ (Solución general)

Las infinitas cuaternas que son solución del sistema se obtienen reemplazando en la solución general las variables libres "y" y "w" por cualquier valor real; éstas se denominan *soluciones particulares*.

Por ejemplo:

Si y = 0 , w = 0 , la cuaterna solución es (0, 0, 1, 0)

Si y = 0 , w = 1 , la cuaterna solución es (0, 0, 2, 1)

Si y = -1 , w = -1 , la cuaterna solución es (-1, -1, 0, -1)

Si y = -2 , w = 0 , la cuaterna solución es (-2, -2, 1, 0)