unidad 3

# Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas

# Sucesiones

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números u objetos, llamados términos. Cada **término** de la sucesión se representa con una letra minúscula con subíndice.

$$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots}$$

## Ejemplo

▶ En la sucesión 2, 7, 12, 17, 22, …

$a_1$ = 2 indica que el primer término de la sucesión es el 2
$a_2$ = 7 indica que el segundo término de la sucesión es 7
$a_3$ = 12 indica que el tercer término es el 12
$a_4$ = 17 es el cuarto término, etc.

Una **sucesión** es **finita** cuando tiene primer y último término.
Una **sucesión** es **infinita** si tiene primer término pero no tiene último término.

## Ejemplo

▶ La sucesión 5, 10, 15, 20, 25 es finita. Su primer término es $a_1$ = 5 y el último $a_5$ = 25.

▶ La sucesión 2, 7, 12, 17, 22, … es infinita. Su primer término es $a_1$ = 2 y no tiene último.

# Sucesiones

Los términos de algunas sucesiones se pueden determinar siguiendo un criterio que denominado **regla de formación**, que relaciona cada término con el lugar que ocupa.

## Ejemplo

Las dos reglas fundamentales son:

- **Sumar una misma cantidad.** En la sucesión 2, 7, 12, 17, 22, 27 … cada término es el anterior más 5.

- **Multiplicar por una misma cantidad.** En la sucesión 3, 9, 27, 81, 243, 729… cada término es el anterior por 3.

En una sucesión, el término que ocupa una posición cualquiera, *n*, se llama **término** general y se escribe $\mathbf{a}_n$.

## Ejemplo

La sucesión 2, 4, 6, 8, 10, … es la formada por los números pares.

El término general de esta sucesión es $a_n = 2 \cdot n$.

$a_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$, $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$, …, $a_n = 2 \cdot n$

# Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, salvo el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija ***d*,** llamada **diferencia** de la progresión.

## Ejemplo

La sucesión 7, 10, 13, 16, 19, … es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 3 al anterior. Es decir, $d = 3$.

El **término general** de una progresión aritmética es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$$

donde $a_1$ es el primer término, y $d$, la diferencia.

## Ejemplo

Si se conoce el primer término de una sucesión $a_1 = 7$ y la diferencia $d = 3$, entonces podemos conocer el término general de esa sucesión:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$$

## Progresiones aritméticas

En una progresión aritmética, **la suma de los términos equidistantes** es igual a la suma de sus extremos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

### Ejemplo

En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 se cumple:

$a_1 + a_8 = 3 + 17 = 20$ $a_2 + a_7 = 5 + 15 = 20$
$a_3 + a_6 = 7 + 13 = 20$ $a_4 + a_5 = 9 + 11 = 20$

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = (a1 + an/2\ ) \cdot n$$

### Ejemplo

En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 se cumple:

$$S_8 = (a1 + a8/2\ ) \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$$

# Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término, salvo el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r,** llamada **razón** de la progresión.

## Ejemplo

▶ 5, 15, 45, 135, 405, … es una progresión geométrica de razón 3. Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 3.

$a_1 = 5$, $a_2 = 5 \cdot 3 = 15$, $a_3 = 15 \cdot 3 = 45$, …

El **término general** de una progresión geométrica es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

donde $a_1$ es el primer término, y $r$, la razón.

## Ejemplo

▶ Si se conoce el primer término $a_1 = 5$ y la razón es r = 3, entonces podemos conocer el término general de esa sucesión:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

Y cualquier valor concreto de la sucesión, por ejemplo, el término $a_5$ es:

$$a_5 = 5 \cdot 3^{5-1} = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$$

## Progresiones geométricas

En una progresión geométrica, **la suma de los *n* primeros términos** es:

$$S_n = a_1 \cdot a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

**Ejemplo**

- En la progresión geométrica 5, 15, 45, 135 la suma de términos es:

$$S_4 = \frac{135 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{405 - 5}{2} = 200$$

En una progresión geométrica, **la producto de los *n* primeros términos** es:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

**Ejemplo**

- En la progresión geométrica 5, 15, 45, 135, el producto de sus términos es:

$$P_4 = \sqrt{(5 \cdot 135)^4} = 455\,625$$

# Aplicación de las progresiones aritméticas y geométricas

Las progresiones geométricas están muy presentes en los **cálculos bancarios**. Cuando se deposita un capital en un banco durante un cierto tiempo este nos ofrece un porcentaje anual de interés, llamado **interés simple.** En ese momento existe la posibilidad de reinvertir el capital junto con sus intereses. Es este último caso se trata de **interés compuesto.**

**Problema resuelto** 3

Mari Carmen ingresa 18 000 € en un banco que le ofrece un tipo de interés anual del 3% durante 5 años.

¿Qué le interesa más, el interés simple o el compuesto?

Ver solución

# Aplicación de las progresiones aritméticas y geométricas

Las progresiones geométricas están muy presentes en los **cálculos bancarios**. Cuando se deposita un capital en un banco durante un cierto tiempo este nos ofrece un porcentaje anual de interés, llamado **interés simple.** En ese momento existe la posibilidad de reinvertir el capital junto con sus intereses. Es este último caso se trata de **interés compuesto.**

## Problema resuelto

3

Mari Carmen ingresa 18 000 € en un banco que le ofrece un tipo de interés anual del 3% durante 5 años.

¿Qué le interesa más, el interés simple o el compuesto?

Si el interés que le ofrecen es simple, se trata de una progresión aritmética: el banco le dará todos los años el mismo beneficio.

Los intereses son el resultado de multiplicar el beneficio de 1 año por el número de años: $i = 18\,000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 5 = 2\,700$ €.

Al cabo de 5 años Mari Carmen tiene su capital de 18 000 € más los intereses, 2 700 €, un total de 20 700 €.

Si el interés que le ofrecen es compuesto, se trata de una progresión geométrica, entonces reinvierte los intereses:

$18\,000 + 3\% \text{ de } 18\,000 = 18\,000 + \frac{3}{100} \cdot 18\,000 =$

$= 18\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 18\,540$ €, al finalizar el primer año.

Al finalizar el segundo año, el 3% se aplica sobre los 18 540 € de manera que:

$18\,540 + \frac{3}{100} \cdot 18\,540 = 18\,540 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 19\,096{,}2$ €

Al finalizar el tercero: $19\,096{,}2 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 19\,669{,}09$ €

Estas cantidades forman una progresión geométrica de razón 1,03. Así, al cabo de 5 años, Mari Carmen tiene:

$18\,000 \cdot (1{,}03)^5 = 20\,866{,}93$ €

Por lo tanto, a Mari Carmen le interesa más que le apliquen un interés compuesto, pues al cabo de 5 años los beneficios serán mayores.