Número complejo

El término **número complejo** describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**). Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física (y notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

Los **números complejos** son una extensión de los números reales, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos representan todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales.

$$\mathbb{C}\ \ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\ \ \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \ \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \ \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \ \text{Naturales}\\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Cada complejo se representa en forma binomial como:

z = a + ib

a es la parte real del número complejo z, y b es su parte imaginaria. Esto se expresa así:

a = Re (z)

b = Im (z)

Usando las definiciones que siguen, se hacen posibles la suma, la resta, la multiplicación y la división entre estos puntos.

Definiremos cada complejo como un par ordenado de números reales (a, b) ó (Re(z), Im(z)), que verifican las siguientes propiedades:

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

(a, b) • (c, d) = (ac - bd, bc + ad).

Los complejos no pueden ser ordenados como, por ejemplo, los números reales.

Unidad imaginaria

Tomando en cuenta que $(a,0)\cdot(0,1)=(0,a)$, se define un número especial en matemáticas de gran importancia, el número *i* o unidad imaginaria, definido como

$$\mathrm{i}=(0,1)$$

De donde se deduce inmediatamente que,

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

Potencia de números complejos

$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$

Conjugado

El conjugado de un complejo z (denotado como ž) es un nuevo número complejo, definido así: el conjugado de un número complejo z es aquel que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo.

Dado z=a+bi su conjugado es ž=a-bi

Ejemplo: z=3+2i su conjugado es ž=3- 2i

z=-5-7i su conjugado es ž=-5+7i

Representación cartesiana, polar y trigonométrica

Representación binomial [editar]

Un número complejo se representa en forma binomial como:

$$z=a+bi$$

La parte real del número complejo y la parte imaginaria, se pueden expresar de varias maneras, como se muestra a continuación:

$$a=\operatorname{Re}(z)=\Re(z)$$
$$b=\operatorname{Im}(z)=\Im(z)$$

Raíces de índice par de números negativos

$\sqrt{-25}$ no tenía solución en el conjunto de los números reales, pero al considerar los números complejos este problema queda resuelto.

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = +5i \;\wedge\; -5i$$

Demostración

$$+5i \,.\, +5i = (5i)^2 = 25i^2 = -25$$

$$-5i \,.\, -5i = (-5i)^2 = 25i^2 = -25$$

Representación geométrica o gráfica de los números Complejos

A cada complejo le corresponde el punto del plano cuya abscisa es la componente real y su ordenada la componente imaginaria.

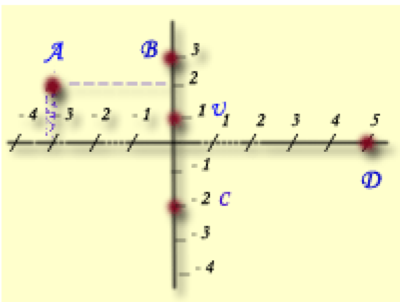
1) Al número complejo (- 3; 2) = - 3 + 2i le corresponde el punto A de abscisa – 3 y ordenada 2

2) A todo número imaginario que tiene componente real 0, tiene el punto que le corresponde sobre el eje de las ordenadas:

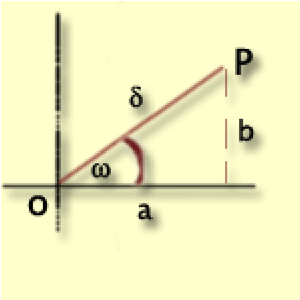
a) (0 ; 3) = 3i le corresponde el punto B
b) (0 ; - 2) = - 2i le corresponde el punto C
c) (0 ; 1) = 1i le corresponde el punto U

3) Todos los números reales, que son complejos que tienen componente imaginaria 0, están representados por el eje de las x

a) (5 ; 0) = 5 le corresponde el punto D.



Forma polar trigonométrica



Si se considera el vector que tiene por origen O de coordenadas y por estremo el punto P, es decir, semirrecta OP, el módulo de este vector se llama módulo del complejo (a ; b).

Lo denominamos módulo ρ de (a ; b)

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

El ángulo que forma dicho vector con el semieje positivo de las x en el sentido contrario a las agujas del reloj, en este caso ω, se llama argumento del número complejo (a ; b)

Se tiene que:

$$\cos \omega = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho . \cos \omega$$

$$\text{sen } \omega = \frac{a}{\rho} \Rightarrow b = \rho . \text{sen } \omega$$

$$bi = \rho . \text{sen } \omega \, i$$

Sumando miembro a miembro [1] y [2]

$$a + bi = \rho . \cos \omega + \rho . \text{sen } \omega$$

Sacando factor común:

$$\boxed{a + bi = \rho .(\cos \omega + i \text{ sen } \omega)}$$

Ejemplo:

$a = \sqrt{3}$ *y* $b = 1$

$$\rho = +\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}$$

$$+\sqrt{4} = +2$$

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = 30^{o}$$

La forma trigonométrica del número complejo dado:

$$\sqrt{3} + i = 2\,(\cos 30^{o} + i \operatorname{sen} 30^{o})$$