EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A nuestro alrededor nos encontramos con muchos símbolos cuyo significado se conoce, como pueden ser las señales de tráfico o algunos logotipos.

Llamamos **algebra** a la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar números de valor desconocido o indeterminado.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información. Dicho lenguaje facilita la construcción de los procesos matemáticos.

Ejemplos: el área de un rectángulo de base b y altura h es $A = b \cdot h$.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la **x**, pero se puede utilizar cualquier otra letra.

Ejemplos:

1) La mitad de la edad de una persona → $\frac{x}{2}$.
2) El doble de un número menos 3 → $2x - 3$.
3) Si doy una entrada de 500€ para comprarme una moto y el dinero restante lo divido en 30 mensualidades, el dinero que tendré que pagar en cada mensualidad es $\frac{x-500}{30}$.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y por paréntesis que nos permite reflejar una determinada situación.

Ejemplo: $3 + 2 \cdot x^2 - x$ es una expresión algebraica.

El signo de multiplicar se sobreentiende delante de una letra o un paréntesis.

Ejemplo: el ejemplo anterior lo escribiremos así $3 + 2x^2 - x$.

MONOMIOS

Una expresión algebraica puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o más variables. Al número lo llamaremos **coeficiente** y al conjunto de las variables, **parte literal**.

Llamaremos **grado del monomio** a la suma de los exponentes de su parte literal y **grado respecto de una variable** al exponente de esa variable. Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Ejemplos:

1) El monomio $4x$ tiene como coeficiente 4, parte literal x y es de grado 1.
2) El monomio $\frac{1}{2}ab^2$ tiene como coeficiente $\frac{1}{2}$, parte literal ab^2, es de grado 3, el grado respecto a la variable a es 1 y el grado respecto a la variable b es 2.

Se dice que dos **monomios** son semejantes cuando tienen la parte literal idéntica.

Ejemplos:

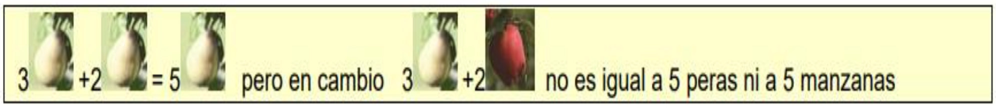
1) Los monomios $3a^2b$ y $7a^2b$ son semejantes porque tienen la misma parte literal a^2b.
2) Los monomios $3ab$ y $7a^2b$ no son semejantes porque no tienen la misma parte literal.

Suma y resta de monomios. Dos monomios solo se pueden sumar (o restar) si son semejantes. En ese caso, se suman (o restan) los coeficientes, dejando la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, la suma (o la resta) queda indicada y esta operación no puede expresarse de manera más simplificada.

Ejemplo: $5xy + 8xy = 13xy$. En cambio, no se puede sumar $2x + 3y$ ya que no son semejantes.

El siguiente ejemplo con peras y manzanas puede aclararte cuando dos monomios se pueden sumar:



Multiplicación de monomios. El producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficientes el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales (recuerda la propiedad: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$). Para multiplicar dos monomios NO es necesario que sean semejantes.

Ejemplo: $(3a^2b) \cdot (2a) = (3 \cdot 2)a^2ba = 6a^{2+1}b = 6a^3b$.

División de monomios. El cociente de dos monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción algebraica. En el caso de que el resultado sea un monomio tendrá por coeficientes el cociente de los coeficientes y por parte literal el cociente de las partes literales.

Ejemplos:

1) $(6a^2b):(3a^2b) = \frac{6a^2b}{3a^2b} = \frac{6}{3} = 2$ (es un número)

2) $(6x^5y):(15x^3) = \frac{6x^5y}{15x^3} = \frac{3\cdot2\cdot x^3x^2y}{3\cdot5\cdot x^3} = \frac{2}{5}x^2y$ (es un monomio)

3) $(6x^5y):(2x^3y^2) = \frac{6x^5y}{2x^3y^2} = \frac{3\cdot2\cdot x^3x^2y}{2\cdot x^3yy} = 3\frac{x^2}{y}$ (es una fracción algebraica pero no un monomio)

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Ejemplo: calcula el valor numérico de la expresión $2x - 3$ cuando x vale 2. Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 2. Por lo tanto: $2 \cdot 2 - 3 = 1$. Es decir, el valor numérico de la expresión algebraica $2x - 3$ cuando $x = 2$ es 1.

La expresión algebraica $5x + 4x$ es **equivalente** a la expresión $9x$, que es su expresión más **simplificada**.

La **extracción de factor común** consiste en aplicar la propiedad distributiva pero al revés de como la utilizábamos cuando multiplicamos, es decir:

$$p \cdot a + p \cdot b + p \cdot c + \cdots = p \cdot (a + b + c + \cdots)$$

El monomio "p" que se extrae tiene como coeficiente el máximo común divisor de los coeficientes y como parte literal, las variables comunes elevadas al menos exponente.

Ejemplos: extrae factor común

1) $3x - 3y = 3(x - y)$

2) $6x^2 + 8x = 2x(3x + 4)$

POLINOMIOS

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los monomios.

Un **polinomio** es la suma de varias monomios no semejantes también llamados términos del polinomio. Los **coeficientes** del polinomio son los números que multiplican cada monomio.

Si uno de los monomios no tiene parte literal se llama término **independiente**.

El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Nombramos a los polinomios con una letra y entre paréntesis las variables que lo integran.

Ejemplos:

1) El polinomio $p(x) = -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, los coeficientes son -3 y $\frac{1}{5}$ y el término independiente es 2.
2) El polinomio $q(x, y) = 4x^2y^3 + 2x^4 + 3y^2 - 5$ es un polinomio de grado 5 en las variables x e y, los coeficientes son 4, 2 y 3 y el término independiente -5.

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al sustituir la variable o variables por números concretos y efectuar las operaciones.

Los números cuyo valor numérico en el polinomio es cero se llaman **raíces** del polinomio.

Ejemplo: dado el polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$, el valor numérico para $x = -1$ es el número $p(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$ y para $x = 2$ el valor numérico es $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. Por lo tanto, el número 2 es una raíz del polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$.

Suma y resta de polinomios. Para sumar o restar dos o más polinomios tendremos en cuenta lo que ya sabemos sobre la suma y resta de monomios. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

1) Dados los polinomios $p(x) = 5x^2 - 3x + 1$ y $q(x) = x^2 + 4x - 7$ de una sola variable, su suma es:

$$(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$$

El resultado se ha obtenido sumando los monomios semejantes.

2) También se puede sumar colocando los polinomios uno debajo del otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes. Observa la imagen:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Producto de un polinomio por un número. Recuerda que para multiplicar un número por una suma, debemos multiplicar el número por cada sumando. Es la propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

<u>Ejemplo</u>: $5 \cdot (2x^3 - 3x - 4) = 10x^3 - 15x - 20$

Producto de un polinomio por un monomio. Observa el siguiente ejemplo en el que se vuelve a aplicar la propiedad distributiva. Recuerda también el producto de potencias $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

<u>Ejemplo</u>: $5x^2 \cdot (2x^3 - 3x - 4) = 10x^5 - 15x^3 - 20x^2$

Producto de dos polinomios. Combinando los productos de un polinomio por un número y por un monomio, como hemos visto en los dos ejemplos anterior, podemos calcular el producto de dos polinomios. Para calcular dicho producto, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y se suman los monomios obtenidos, reduciendo los que sean semejantes.

<u>Ejemplos</u>:

1) $(-5) \cdot x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
2) $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
3) También se puede multiplicar como se hacía con los números naturales, colocando los polinomios uno debajo del otro. Observa la imagen

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & \times & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Como complemento a la teoría anterior, es recomendable que se visualicen los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=pHVZuMaBTMA

https://www.youtube.com/watch?v=XvRwXCvZ-Lc