1.3.3 Binomische Formeln

Aus der Multiplikation von Klammerausdrücken lassen sich drei Sonderfälle herausarbeiten.

1.3.3.1. 1. Binomische Formel

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

1.3.3.2. 2. Binomische Formel

$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

1.3.3.3. 3. Binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1.3.4 Binominalkoeffizienten

Sobald der Exponent von (a + b) größer wird als zwei, ergibt sich nach den bisher bekannten Rechenvorschriften eine enorme Rechenarbeit. Vergleicht man die Lösung folgender Klammern, lässt sich eine Vermutung über die Struktur der Lösung solcher Aufgaben anstellen:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = 1a + 1b$

$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Die nebenstehenden Koeffizienten kann man folgendermaßen ordnen:

1
1 1 Pascalsches
1 2 1 Dreieck!
1 3 3 1

für die nächste Zeile ergibt sich durch Addition:

1 4 6 4 1

und dies wären dann die Koeffizienten von $(a + b)^4$.

Die Frage ist, wie verhalten sich die Exponenten von $(a + b)^4$?

$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 =$

$\underline{a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4}$

Wie man sieht, fallen die Exponenten von a von 4 auf 0 und die Exponenten von b steigen von 0 auf 4. Die Koeffizienten wurden der entsprechenden Zeile des Pascalschen Dreieckes entnommen.
Weiteres Beispiel:

$(a - b)^4 = \underline{a^4 - 4a^3b^1 + 6a^2b^2 - 4a^1b^3 + b^4}$

Vorzeichenregel: Terme mit <u>ungeraden</u> Exponenten sind <u>negativ</u>, Terme mit <u>geraden</u> Exponenten sind <u>positiv</u>. Ist a positiv, ist auch die höchste Potenz von a positiv.