SUCESIONES NUMÉRICAS

Niveles: 2º Ciclo de la ESO y Bachillerato

Autora: Pilar Montes Rueda

I.E.S. MARE NOSTRUM

SUCESIONES

Las secuencias ordenadas de objetos, figuras geométricas, números o configuraciones variadas, tienen un gran atractivo lúdico: es divertido averiguar el criterio por el que han sido formadas y, por tanto, saber añadir los siguientes elementos.

En la evolución de la matemática las sucesiones son tan antiguas como los números naturales y sirven para estudiar, representar y predecir los fenómenos que ocurren en el tiempo de forma intermitente.

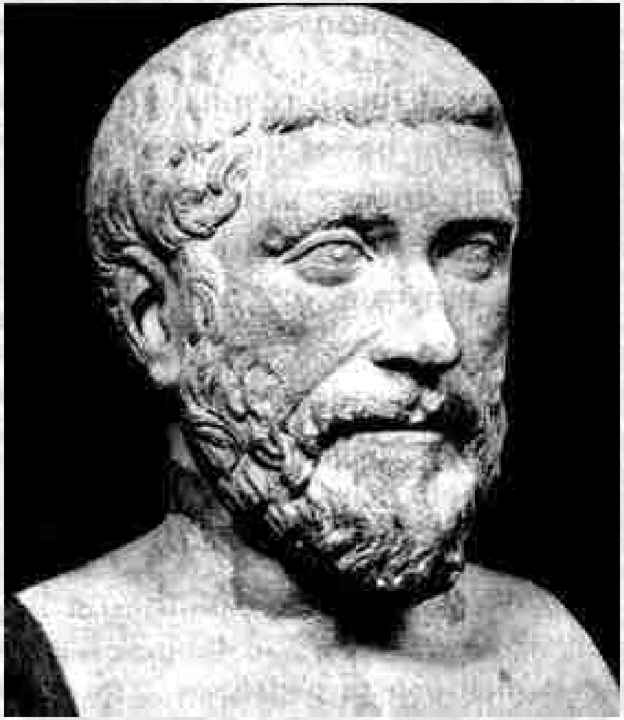
A continuación se te proponen 15 ejercicios, curiosos e interesantes, que te animo a resolver para afianzar los conocimientos adquiridos sobre sucesiones numéricas.

Si tienes alguna duda teórica o quieres ampliar información puedes recurrir a consultar:

- **Las diapositivas de teoría.**
- **La diapositiva de páginas web.**

ÍNDICE

Ejercicio 1: Números poligonales



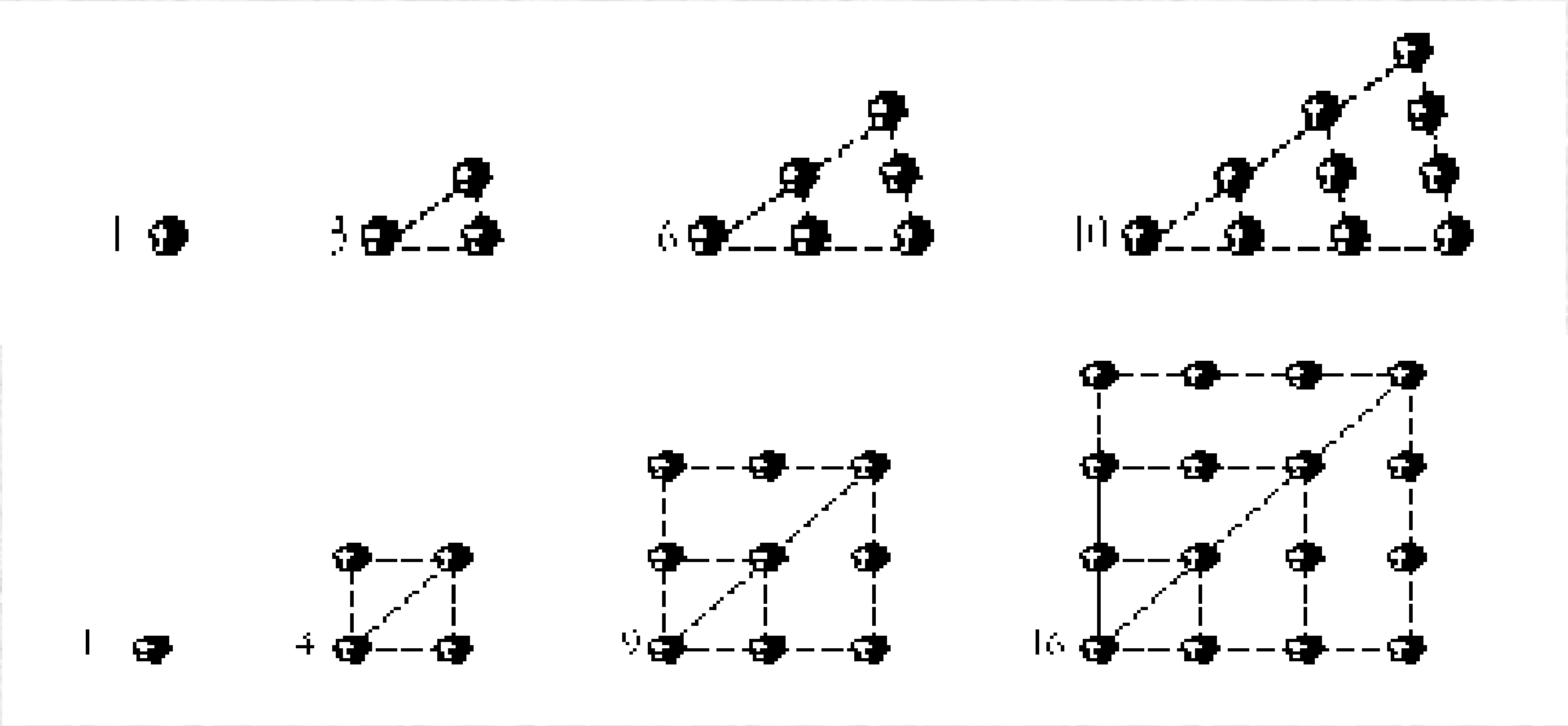
Pitágoras de Samos
(580 – 500 a.C.)

Los pitagóricos, grandes aficionados a los números naturales, debieron de ser los primeros en interesarse por la construcción de sucesiones infinitas.

Consideraron, en particular, sucesiones de números originados jugando con piedras (cálculos), colocadas en forma de polígonos. De ahí viene nuestro nombre de Cálculo.

➔

Los pitagóricos construyeron números poligonales: triangulares, cuadrados, pentagonales...



Encuentra el término general de la sucesión de números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales y heptagonales.

Ejercicio 2: Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa
(Fibonacci)
(1170-1250)

Un matemático italiano de la Edad Media, Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, publicó en 1202 uno de sus libros Liber Abaci en él introduce el sistema decimal Hindú-Arábigo y usa los números arábigos dentro de Europa. Un problema en Liber Abaci permite la introducción de los números de Fibonacci y la serie de Fibonacci por las cuales Fibonacci es recordado hoy en día.

➔

Fibonacci propone en su libro Liber Abaci el siguiente problema:

"Un par de conejos, macho y hembra, encerrados en un campo donde pueden anidar y criar, empiezan a procrear a los dos meses de su nacimiento, engendrando siempre un único par macho y hembra, y a partir de ese momento cada uno de los meses siguientes un par más de iguales características. Admitiendo que no desapareciese ninguno de los conejos, ¿cuántas parejas contendrá el cercado al cabo de un año?"

Ejercicio 3: Un niño llamado Gauss

Karl Friederich Gauss
(1777-1855)

Hace poco más de dos siglos, un maestro alemán que quería paz y tranquilidad en su clase, propuso a sus alumnos de 5 años que calcularan la suma de los números del 1 al 100.

A Gauss se le ocurrió que:

$$1 + 100 = 2 + 99 = \ldots = 50 + 51$$

Era claro que la suma era

$$50 \times 101 = 5050$$

Al pobre maestro le duró poco la tranquilidad.

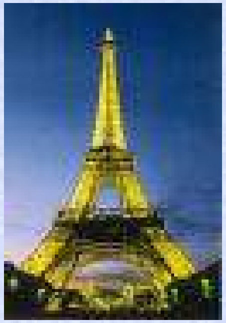
➔

Tú también puedes resolver problemas parecidos al que efectuó Gauss a los cinco años. Por ejemplo calcular cuánto vale la suma de:

- Los 200 primeros números naturales.
- Los 50 primeros números pares.
- Los 100 primeros números impares.
- Los 40 primeros múltiplos de 3.
- Los múltiplos de 5 menores que 180.
- Los 25 primeros múltiplos de 9.
- Los múltiplos de 7 comprendidos entre 22 y 225.

Ejercicio 4: El papel plegado

Cada vez que pliegas una hoja de papel se duplica su grosor. Cuando has hecho seis o siete dobleces ya no puedes doblarla más, pero imagina que sí pudieras. Comprueba que con diez dobleces superas el grosor del libro más gordo de la biblioteca. Si suponemos que la hoja de papel tiene 0,14 mm de grosor:

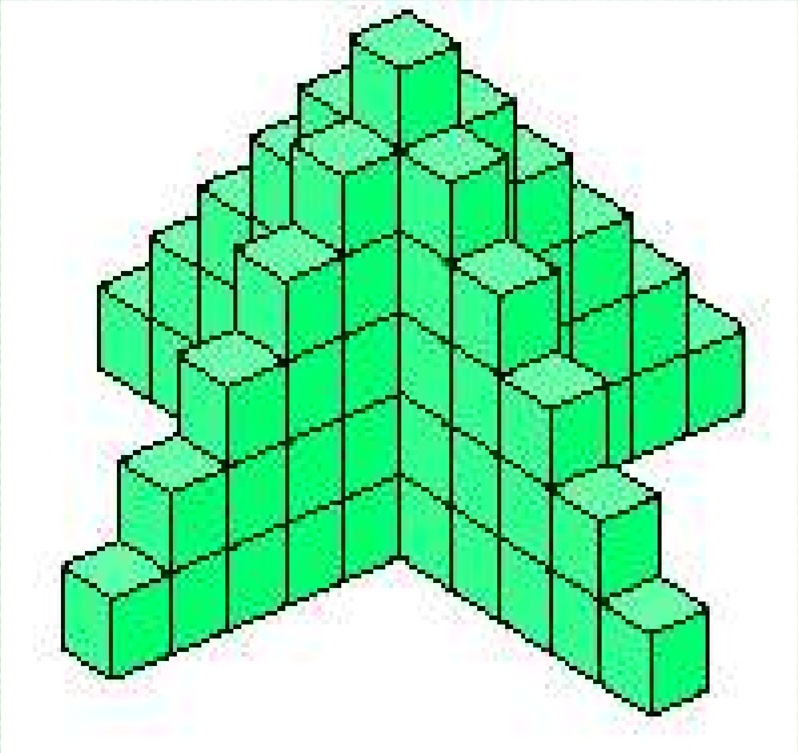


a) ¿Superarías con 22 dobleces la altura de la torre Eiffel? (321 m)

b) ¿Cuántos dobleces necesitas para que su grosor sea mayor que la altura del Everest? (8848 m)

c) ¿Y si pudieras doblarlo 50 veces? Halla el grosor y compáralo con la distancia de la Tierra al Sol. (150×10^6 km)

Ejercicio 5: Construcción I



Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 50 pisos

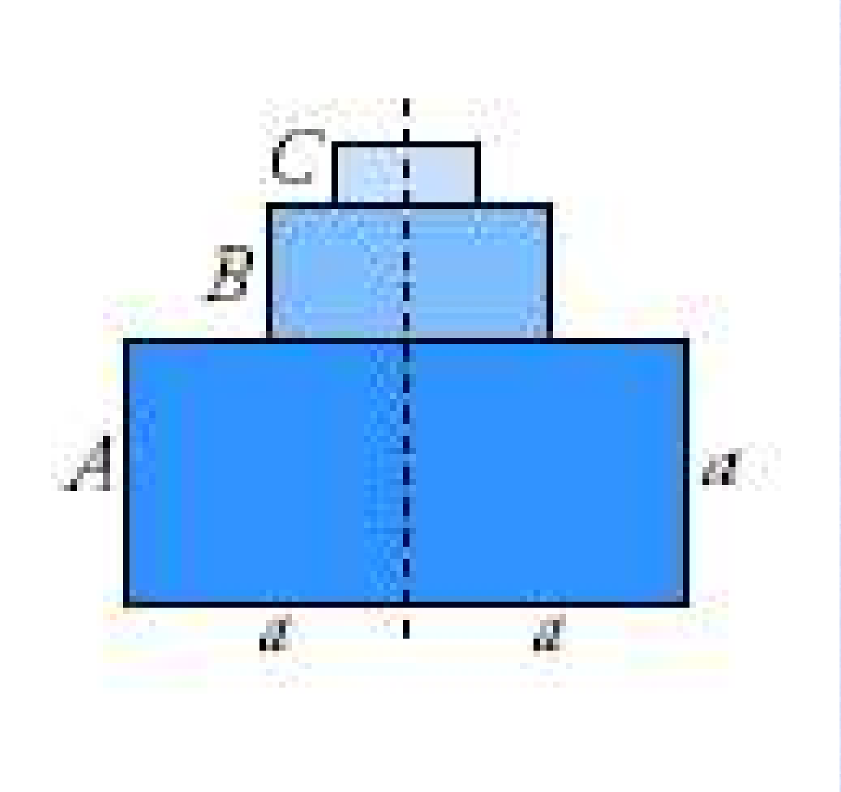
Ejercicio 6: Construcción II

Se construye un rectángulo, A, uniendo dos cuadrados de lado a. Sobre él se construye otro rectángulo, B, formado por dos cuadrados de lado la mitad de los anteriores.

Se continua el proceso indefinidamente hacia arriba.

a) Calcula la altura de la figura.

b) Calcula su superficie

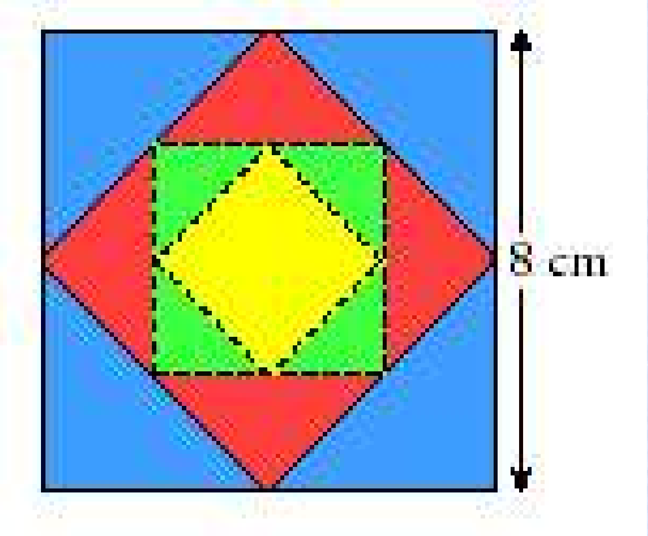


Ejercicio 7: Un secreto riguroso

A Isabel y Santiago, a las nueve de la mañana, les han contado un secreto con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado solamente a tres amigos; por supuesto, de toda confianza. Un cuarto de hora después, cada uno se lo ha contado a otros tres amigos. Estos, a su vez, lo volvieron a contar a otros tres. Y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente conocía el riguroso secreto a la hora de almorzar?

Ejercicio 8: Construcción III

Observa los diferentes cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos.

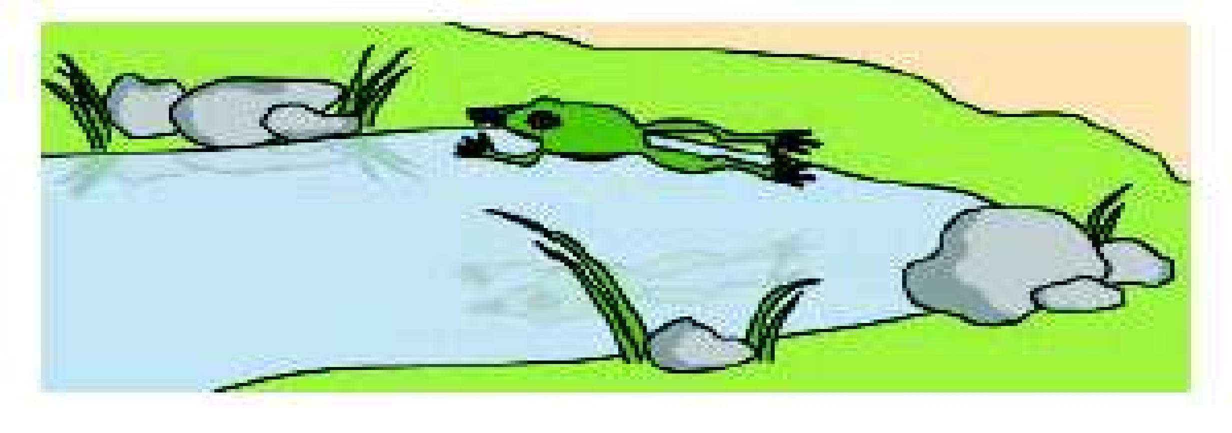


a) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esta forma.

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

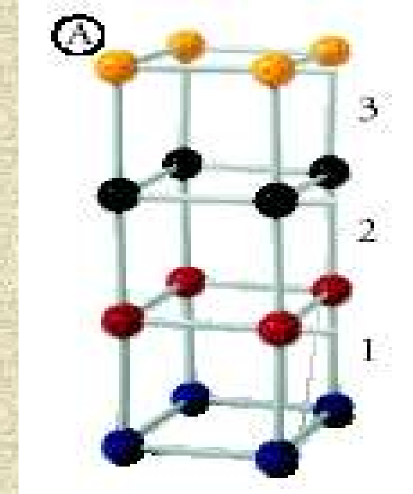
Ejercicio 9: La rana saltarina

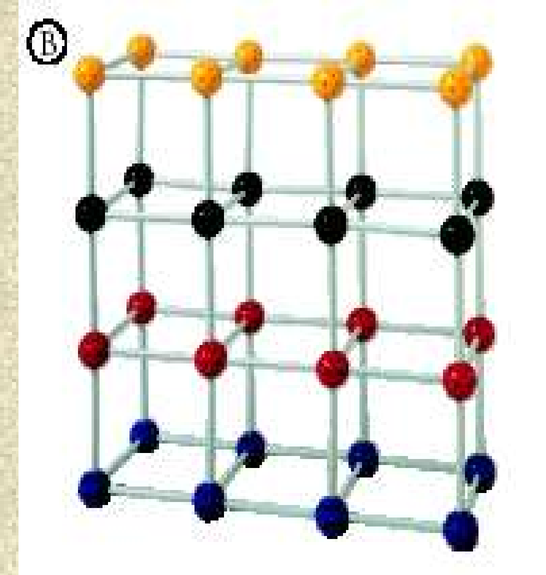
Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, y el primer salto es de 2 m. ¿Llegará al centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca siguiendo el diámetro?



Ejercicio 10: Construcción IV

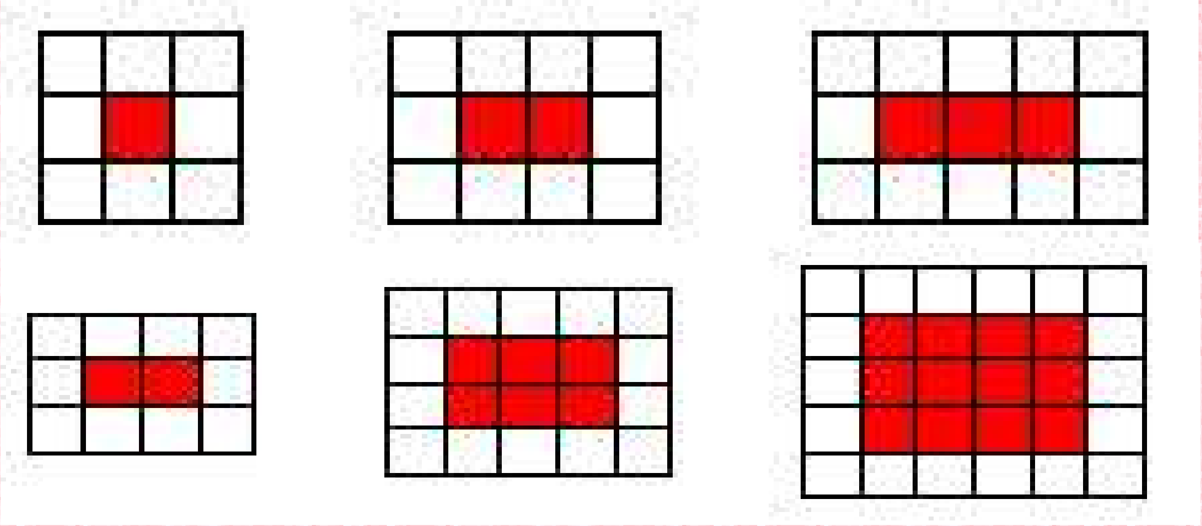
Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos. ¿Y para la figura B?





Ejercicio 11: Construcción V

Observa la serie de rectángulos en a) y en b):



- **¿Cuántos cuadrados rojos tiene cada figura?**
- **¿Y blancos?**
- **¿Cuántos cuadrados rojos y cuántos blancos tendrá la figura que ocupa el lugar 22?**
- **¿Y el lugar n?**

Ejercicio 12: El César y el centurión

Un centurión le pidió al César que cumpliese su promesa de recompensarle por su valentía. El César, mostrándole grandes montones de monedas, le dijo:

"Puedes tomar un denario; mañana 2; al día siguiente, 4; al otro 8. Así sucesivamente, cada día duplicarás lo del anterior. Pero deberás llevarte lo de cada día tú sólo de una vez. Te permito usar un carro."

Suponiendo que un denario pesara 20 g y que lo máximo que consiguiera llevar en un carro es una tonelada. ¿Cuántos días duró la recompensa? ¿Cuál fue el número de denarios de la última carretada?

Ejercicio 13: ¿Un negocio rentable?

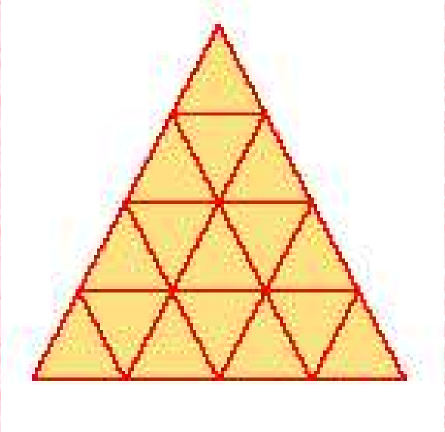
El día 1 de cierto mes, un amigo le propone a otro un trato: "Cada día de este mes tú me das 100000 euros y yo duplico el dinero que hay en esta caja que, a fin de mes, te podrás llevar" -le dijo, mostrando un céntimo que había dentro-. "Podemos empezar hoy, si quieres".

El otro después de pensar y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: "¿Por qué no me lo propones dentro de un año exactamente?"

¿Por qué crees tú que le contestó de esta forma?

Ejercicio 14: Construcción VI

Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?



En estos triángulos vuelve a unir los puntos medios y así sucesivamente. Escribe las siguientes sucesiones:

a) Número de triángulos que tienes cada vez.

b) Longitudes de los lados de esos triángulos.

c) Áreas de los triángulos.

d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?

Ejercicio 15: Apilando naranjas

Tenemos una pila de naranjas, hecha en forma de pirámide triangular, cuyo primer piso es un triángulo que tiene cuatro naranjas de lado, el segundo piso un triángulo de tres naranjas de lado, el tercer piso un triángulo de dos naranjas de lado y el cuarto piso una naranja. ¿Cuántas naranjas hay en la pila?

Si consideramos una pila de naranjas formando una pirámide cuadrangular cuyo primer piso tiene cuatro naranjas de lado. ¿Cuántas naranjas hay en la pila?

¿Con qué base se pueden apilar más naranjas?

¿Qué apilamiento es más ventajoso?

TEORÍA

Se llama sucesión a un conjunto de números (u otros objetos) dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo...

Los elementos de una sucesión se llaman términos y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión: a_1, a_2, a_3, a_4...

Se llama término general de una sucesión y se simboliza por a_n, al término que representa un elemento cualquiera de la misma, n simboliza un número natural cualquiera n = 1, 2, 3, 4...

Las sucesiones cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores, se dice que están dadas en forma recurrente.

Una progresión aritmética es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo) al que se llama diferencia, d, de la progresión.

El término general a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y la diferencia es d, se calcula según la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$$

➔

La <u>suma de los n primeros términos de una progresión aritmética</u> es:

$$S = (a_1 + a_n)\cdot n/2$$

Una <u>progresión geométrica</u> es una sucesión en la que se pasa, de cada término al siguiente, multiplicando por un mismo número, llamado razón, r, de la progresión.

El <u>término general a_n de una progresión geométrica</u> cuyo primer término es a_1 y la razón r, se obtiene según la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

La <u>suma de los n primeros términos de una progresión geométrica</u> de razón r es:

$$S_n = (a_n \cdot r - a_1)/(r-1) = (a_1 \cdot r^n - a_1)/(r-1)$$

<u>Suma de todos los términos de una progresión geométrica de razón |r|<1</u>: cuando la razón de una progresión geométrica es un número comprendido entre –1 y 1 (-1 < r < 1) los términos de la progresión decrecen aproximándose a cero, a medida que n se hace muy grande r^n tiende a cero. Esta situación se expresa de la siguiente forma:

$$S_n = a_1/(1-r)$$

Recursos web

Para buscar información sobre el tema de "sucesiones numéricas" o sobre sucesiones famosas o matemáticos que han aparecido en esta actividad, puedes consultar las siguientes direcciones:

Unidades Didácticas del Proyecto Descartes:

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/

En concreto, en las unidades del primer curso de Bach. De HH. Y CC. SS. encontrarás un tema llamado progresiones aritméticas y geométricas.

Historia de Matemáticos Famasos:

http://www.mat.usach.cl/histmat/html/indice.

Recursos didácticos de la S.A.E.M.Thales:

http://thales.cica.es/

Página del profesor de Matemáticas Antonio Pérez:

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/