KAPITEL 1

Rörelse i två dimensioner

1.1. Rörelselagarna i en rums dimension

Vi har tidigare studerat rörelse längs en linje(en dimension) och då kommit fram till vissa ekvationer som beskriver läget och hastigheten vid konstant acceleration , repetera dem gärna. De 5 viktigaste är

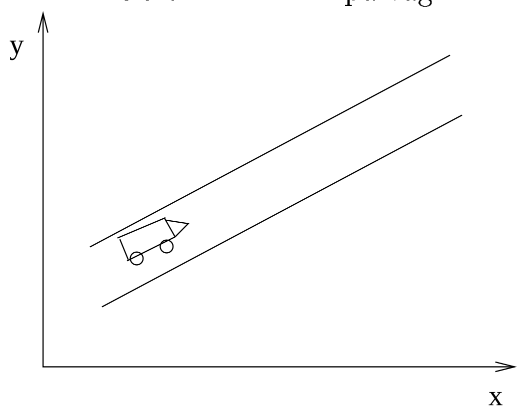
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$< v >= \frac{v_0 + v}{2}$$
$$x =< v > t$$
$$v = v_0 + at$$
$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

1.2. Koordinatsystem i två rums dimensioner

Du har studerat koordinatsystem i 2 rums dimensioner i matematiken och dina kunskaper därifrån behövs nu. Föremålet måste inte längre röra sig längs en linje utan kan röra sig fritt på t.ex. en bordsyta eller en pappersyta.

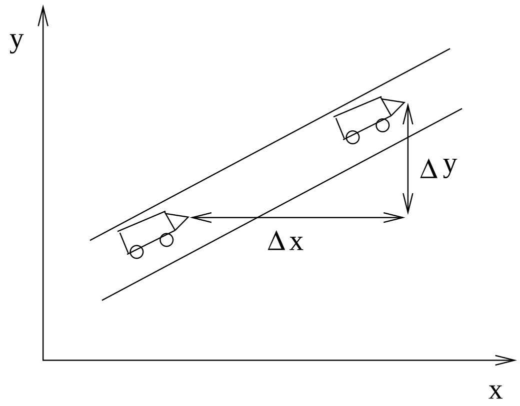
En bil kör längs en väg enligt figur 1.2.1.

Figur 1.2.1. Bil på väg.



I figur 1.2.2 ser man att bilen rör sig både i x-led och i y-led. När bilen kört en sträcka längs vägen kan man dela upp förflyttningen i en x-förflyttning och en y-förflyttning. Förflyttningen i x kallad Δx och i y kallad Δy ger oss möjlighet att diskutera hastigheten

FIGUR 1.2.2. Bil på väg, dubbelexponering.



i x-led som

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

och hastigheten i y-led

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

där Δt är tiden för förflyttningen.

Förflyttningen längs vägen betecknar jag med Δs. Följande samband råder mellan de olika förflyttningar

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

enligt Pythagoras sats.

Samma samband får man mellan hastigheterna genom att dividera med $(\Delta t)^2$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

På samma sätt definierar man acceleration,

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ och } a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}.$$

ex. En bil har kört 50 km i 30° vinkel till x-axeln.

Hur långt har bilen rört sig i x-led respektive y-led?

x och y koordinaterna kan beräknas med hjälp av sinus och cosinus funktionerna.

$$x = 50\cos(30) \approx 43 \text{ m}$$

och

$$y = 50\sin(30) \approx 25 \text{ m}.$$

Om bilen kört denna sträcka på 40 min=2/3 h, blir hastigheterna

$$v_x = \frac{43,3}{2/3} \approx 65 \text{ km/h}$$

respektive

$$v_y = \frac{25}{2/3} \approx 38 \text{ km/h}$$

och den totala hastigheten

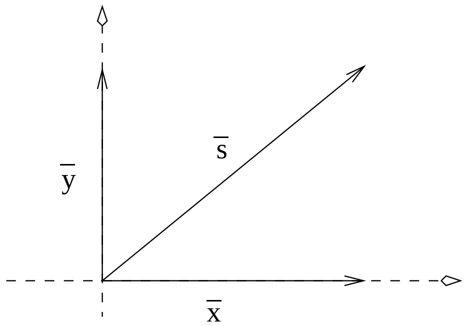
$$v = \sqrt{64,95^2 + 37,5^2} = 75 \text{ km/h},$$

vilket ska bli samma som

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{50}{2/3} = 75 \text{ km/h}.$$

Samma distinktioner som tidigare mellan medelhastighet och momentanhastighet är viktiga. I figur 1.2.3 ser vi en abstraktare beskrivning. Här är bara vektorn $\overrightarrow{s}$ (förflyttning) uppdelad i två komposanter, $\overrightarrow{x}$ och $\overrightarrow{y}$. Uppgifter

FIGUR 1.2.3. Förflyttning uppdelad komposanter,



(1) En bil kör i $+20°$ i förhållande till x-axeln. Bilen hinner $3,0$ km på 2 minuter.
  (a) Beräkna bilens fart.
  (b) Beräkna bilens fart i x-ledoch y-led.
  (c) Hur långt hinner bilen i x-led på 20 minuter?
  (d) Hur långt hinner bilen i y-led 20 minuter?
  (e) Hur långt har bilen kört på 20 minuter?

1.3. De 5 rörelseekvationerna i x och y led

De 5 rörelseekvationerna gäller nu för varje axel separat. Vi sammanställer formlerna i en tabell.

x-led	y-led
$x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$
$< v_x >= \frac{v_{0x}+v_x}{2}$	$< v_y >= \frac{v_{0y}+v_y}{2}$
$x =< v_x > t$	$y =< v_y > t$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + a_y t$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x x$	$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y y$

Ingen lär sig detta utantill utan se på de 5 rörelseekvationerna från tidigare och se till att du förstår beteckningarna i tabellen.

ex. En bil har accelerationen $5,0\ \mathrm{m/s^2}$ och startar från origo i vila. Bilen rör sig i $+50°$ vinkel till x-axeln. Beräkna dess lägeskoordinater efter $3,0$ s.

För lägeskoordinaterna gäller med $v_0 = 0$ för x-led

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2.$$

Vi beräknar accelerationen i x-led respektive y-led $a_x = 5,0\cos(50°) \approx 3,21\ \mathrm{m/s^2}$, $a_y = 5,0\sin(50°) \approx 3,83\ \mathrm{m/s^2}$. Så vi får

$$x = 0,5 \cdot 3,21 \cdot 3,0^2 \approx 14,4\ \mathrm{m}$$

och

$$y = 0,5 \cdot 3,83 \cdot 3,0^2 \approx 17,2\ \mathrm{m}.$$

Lägeskoordinaterna är således (14,4;17,2).

(1) En partikel rör sig med en konstant acceleration, $0,3\ \mathrm{m/s^2}$. Partikeln rör sig i $30°$ vinkel i förhållande till x-axeln. Partikeln startar från vila i origo.
   (a) Beräkna dess acceleration i x-led och y-led.
   (b) Skriv en formel för dess hastighet i x-led respektive y-led.
   (c) Skriv en formel för dess läge i x-led respektive y-led.
   (d) Ange partikelns läge(x och y koordinat), hastighet och acceleration då $t = 2,0$ s.

1.4. Sammansättning av hastigheter

I exemplet med bilen har bilen en given hastighet som delas upp i en förflyttning i x-led och en förflyttning i y-led. På samma sätt delas också hastigheten upp i x-led och y-led. Detta motsvarar att dela upp en vektor i komposanter.

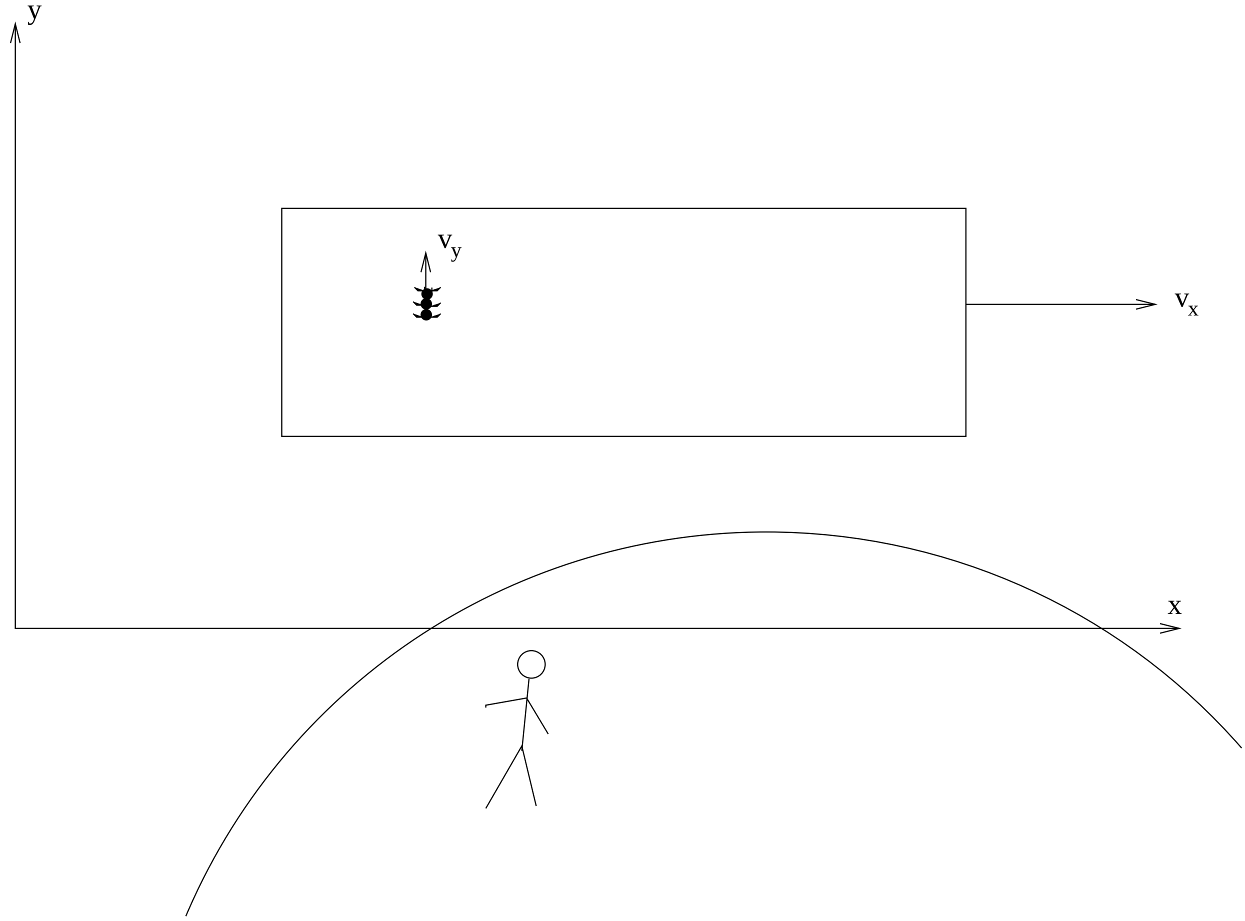
Man kan också träffa på det omvända förhållandet att två samtidiga rörelser i x-led och y-led ska sättas ihop. Detta motsvarar att beräkna resultanten. Sammansättning av hastigheter(inte bara i x- och y-led) förekommer t.ex.

- När man rör sig i en bil. Bilen rör sig i förhållande till vägen och du rör dig i förhållande till bilen.

- Vid promenad på en båt. Båten rör sig i förhållande till land och du rör dig i förhållande till båten.
- Vid ivägsändandet av en raket. Jorden rör sig i förhållande till Solen och raketen rör sig i förhållande till Jorden.
- En myras promenad på din kropp. Kroppen rör sig i förhållande till marken och myran rör sig i förhållande till din kropp.
- Ljudets hastighet i ett tåg. Tåget(med luft) rör sig i förhållande till marken och ljudet rör sig i förhållande till tågets luft.

Vi betraktar en situation med en bräda i vattnet med ett litet djur på, se figur 1.4.1.

FIGUR 1.4.1. Bräda med djur flytandes i vattnet. Iakttagare på land.



Djuret kryper i y-riktningen och bräden flyter iväg i x-riktningen. Vårt koordinatsystem(KS) är personen på land. Om djuret nu kryper med farten $1,1$ cm/s i y-led och brädan flyter med farten $2,5$ cm/s i x-led så ges x-koordinaten(i cm) av

$$x = 2,5t$$

och y-koordinaten

$$y = 1,1t$$

där t är tiden i sekunder. Vi har här även satt startkoordinaterna till origo, vilket inte stämmer med bilden men gör det enkelt att räkna och bilden blir tydlig.

Djurets totala fart, i personens KS ges av

$$v = \sqrt{2,5^2 + 1,1^2} \approx 2,7 \text{ cm/s}.$$

Efter $3,0$ s har djuret koordinaterna $x = 2,5 \cdot 3,0 = 7,5$ cm och $y = 1,1 \cdot 3,0 = 3,3$ cm. Den har alltså själv krupit $3,3$ cm men förflyttat sig $s = \sqrt{7,5^2 + 3,3^2} \approx 8,2$ cm i personens KS.

Vi betraktar en

1.5. Uppgifter

1.6. Facit