

De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro

Edith Padrón Fernández
Universidad de La Laguna

El estudio de los poliedros es una de las áreas más versátiles de las Matemáticas, en lo que respecta tanto a sus aplicaciones como a las posibilidades que ofrece a expertos y a amateurs para trabajar en estos temas. Los poliedros más comunes son conocidos por gran parte de la sociedad; sin embargo, son muchos los que desconocen algunas de sus propiedades. En este trabajo intentaremos, además de destacar algunas de estas propiedades, poner de manifiesto cómo el arte y la ciencia han motivado el estudio matemático de los poliedros y cómo esos mismos estudios han supuesto un desarrollo artístico y científico posterior. Es por ello que hemos organizado este trabajo en tres secciones. En primer lugar recogemos algunos aspectos generales sobre poliedros. En la segunda sección intentaremos mostrar la interacción entre poliedros y arte. Finalmente, en la última parte del trabajo, destacaremos algunas situaciones relacionadas con diversas ramas de la Ciencia como la Física, la Aeronáutica o la Biología, en las que aparecen ciertas estructuras poliedrales.

Poliedros

Hemos mencionado al comienzo de este trabajo el término *Poliedro* sin precisar intencionadamente su definición, ya que este vocablo tiene varias acepciones. Depende del contexto en el que estemos trabajando. Para nuestros propósitos un poliedro será una forma 3-dimensional acotada por polígonos (región del plano limitada por segmentos).

Una clase especial de poliedros son los *poliedros convexos*. Algebraicamente, un poliedro convexo es el conjunto de soluciones del sistema $MX \leq B$, donde M es una $s \times 3$ -matriz real y B es un s -vector. Geométricamente, un poliedro convexo es aquél en el que el segmento que une dos puntos del mismo está contenido en el poliedro o en su interior. En un poliedro convexo, el número de vértices V , el de caras F y el de aristas E están relacionados por la fórmula de Euler $V+F-E=2$.

La *figura vértice de un vértice* de un polígono es el segmento que une la mitad de los dos lados adyacentes tal y como se indica en Fig. 1.

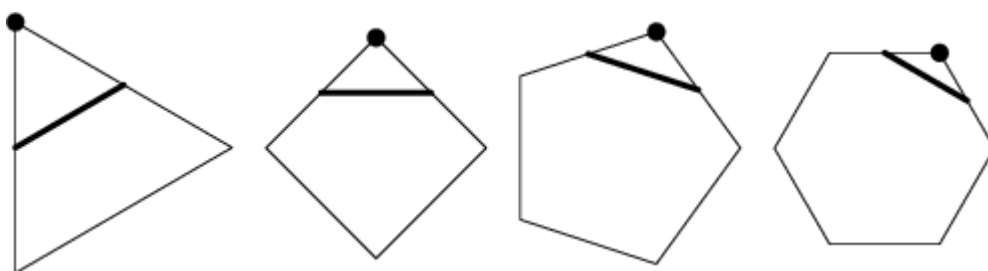


Fig. 1: Figura vértice de diferentes polígono

De igual forma, en un poliedro la figura vértice de uno de sus vértices es el polígono cuyos lados son las figuras vértice de las caras adyacentes a dicho vértice (ver Fig. 2).

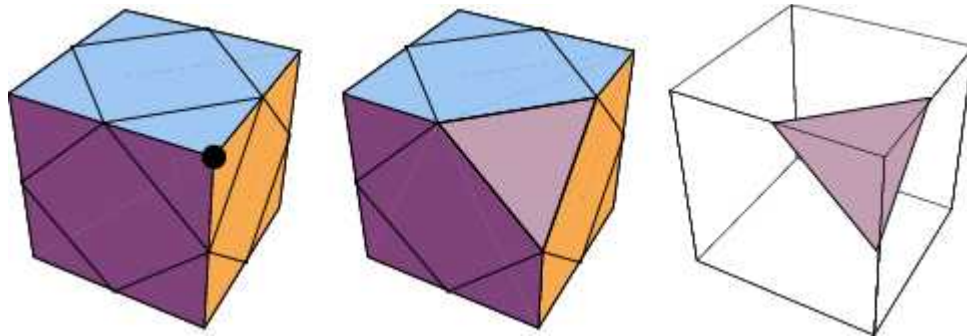


Fig. 2: Figura vértice de un poliedro

Con la premisa de que todas las caras son polígonos regulares (polígonos con lados y figuras vértices de igual longitud) y barajando las propiedades “*caras iguales*”, “*figuras vértice iguales*” y “*convexidad*”, tenemos las siguientes clases de poliedros, algunos de los cuales consideraremos a lo largo de este trabajo.

¿Idénticas caras?	¿Idénticas figuras vértice?	¿Convexidad?	Número	Clase
Sí	Sí	Sí	5	Sólidos Platónicos
No	Sí	Sí	13	Sólidos Arquimedianos
			infinitos	Prismas & Antiprismas
Sí	Sí	No	4	Poliedros de Kepler-Poinsot
Sí	No	Sí	8	Deltahedros
No	Sí	No	53	Poliedros Uniformes No-convexos
			infinitos	Prismas & Antiprismas No-convexos
No	No	Sí	92	Sólidos de Johnson

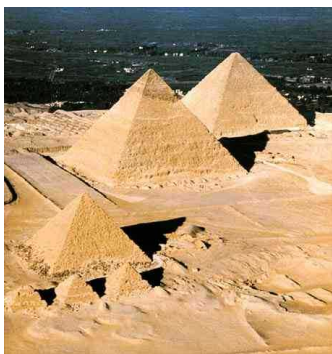
Etimológicamente la palabra poliedro (Πολυεδρος) deriva de los términos griegos Πολυς (mucho) y εδρα (plano).

Los vestigios encontrados en algunas zonas de Escocia nos hace pensar que ya algunos pueblos neolíticos conocían la existencia de ciertos poliedros. Estos restos, actualmente localizados en el Ashmolen Museum de Oxford, son piedras esculpidas que recuerdan a algunos poliedros (cubo, icosaedro, dodecaedro..) y que se sospecha pudieron ser usados como dados, elementos de juego o decorativos (ver Fig.3).



Fig. 3: Restos neolíticos (2000 a.C.)

Algunas civilizaciones como la egipcia y la babilónica tenían conocimiento más explícitos de algunos de estos poliedros (cubo, tetraedro, octaedro, pirámide,). Una evidencia de ello la encontramos en las famosas pirámides egipcias, santuarios de eternidad de los faraones, en donde ya comienza a ponerse de manifiesto la conexión entre los poliedros y ciertos aspectos religiosos y místicos.



Estos conocimientos pudieron haberse propagado desde Egipto y Babilonia a Grecia a través de los viajes de Tales y Pitágoras. Se sospecha que el interés de Pitágoras por los poliedros regulares viene de la observación de estas formas geométricas en los minerales, ya que su padre era grabador de piedras preciosas.

Los Pitagóricos estaban fascinados por los poliedros conocidos, pero sobre todo, por el dodecaedro y por su relación con el cosmos. Relata Jámblico cómo la divinidad elimina al delator de uno de sus grandes secretos: *"la divinidad se disgustó con el que divulgó las doctrinas de Pitágoras, de tal forma que pereció en el mar, por el sacrilegio cometido, el que reveló como se inscribía en una esfera la constitución del dodecaedro"*.

La razón de esta fascinación se debe a su relación con *el pentagrama místico (pentalfa)* o estrella de 5 puntas (ver Fig.4), emblema de la salud y símbolo de identificación de los Pitagóricos. Esta estrella se obtiene al trazar en un pentágono regular las diagonales o prolongar sus lados. Una de las bellas propiedades que tiene el pentagrama es que los cortes entre las diagonales determinan segmentos que están en *proporción áurea (divina proporción)*, siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono. Recordamos que un punto C entre el segmento AB determina la sección áurea si $AC/BC = BC/AB$. La sección áurea, en forma de rectángulo áureo (los lados del rectángulo están en proporción áurea), aparece en muchas obras arquitectónicas emblemáticas a lo largo de la historia: el Partenón, la gran muralla China, el castillo de Windsor, la Plaza de la Concordia en París,...



Fig. 4: Pentalfa

El pentagrama ya era conocido en Egipto. En el templo de Kurna (1700 a.C.) fue encontrado un tablero con este símbolo en el que se practicaba un juego (pentalfa), que todavía subsiste en algunos lugares de Creta.

Aunque Proclo atribuye a Pitágoras la construcción de las figuras "cósmicas" que relacionan los 4 elementos primarios (fuego, tierra, aire y agua) con el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro, respectivamente, parece que esto es poco probable, ya que Empédocles de Agrigento fue el primero que distinguió los cuatro elementos primarios. Al parecer los Pitagóricos sólo conocían el tetraedro, el cubo y el dodecaedro. El icosaedro y el octaedro se atribuyen a un amigo de Platón, Teeteto, a quien se debe el estudio sistemático de los cinco poliedros regulares. Los poliedros regulares (el tetraedro, el cubo, el icosaedro, el octaedro y el dodecaedro) se llaman *sólidos Platónicos* por el papel que tiene en el diálogo de Platón (*Timeo*) en donde se pone de manifiesto la relación entre los cuatro primeros sólidos Platónicos y los 4 elementos primarios. Del quinto poliedro regular, el dodecaedro, dice: *"Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final"* Para Platón la belleza de los poliedros regulares no reside en su apariencia física, sino en el ámbito del pensamiento matemático: *"cada uno de los 5 sólidos participa en la idea de sólido regular e inversamente esta idea se plasma en 5 casos particulares"* (*La República*).

Euclides mejoró los trabajos de Teeteto en relación con los sólidos Platónicos, probando que los únicos poliedros convexos regulares (con caras y figuras vértices iguales) eran los Sólidos Platónicos. De hecho, este resultado es importante en la historia de las Matemáticas ya que constituyen el primer ejemplo de

teorema fundamental de clasificación: “Ninguna otra figura, además de estos cinco (los sólidos Platónicos) se pueden construir con polígonos equiláteros y equiángulos”. Su demostración es muy simple, ya que si tenemos un poliedro regular con m polígonos regulares de n lados que confluyen en cada vértice, entonces la suma (m sumandos) de los ángulos $(n-2)180^\circ/n$ que determinan las aristas en un vértice es menor que 360°

$$m(n-2)180^\circ/n < 360^\circ,$$

esto es, $(m-2)(n-2) < 4$. Las soluciones (m,n) a esta desigualdad son $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$ correspondiendo en cada caso con uno de los sólidos Platónicos.

Los poliedros Platónicos pueden ser considerados como poliedros en el límite de la perfección. Algunas evidencias a este respecto son las siguientes:

- Los sólidos Platónicos son poliedros convexos cuyas caras y figuras vértice son polígonos regulares. Las figuras vértice también son polígonos regulares. Esta última condición es equivalente a que los vértices del poliedro estén en una esfera o que los ángulos diedrales (ángulos que determinan las caras adyacentes del poliedro) sean iguales.
- Las figuras vértice de los sólidos Platónicos generan nuevos poliedros (ver Fig.5).

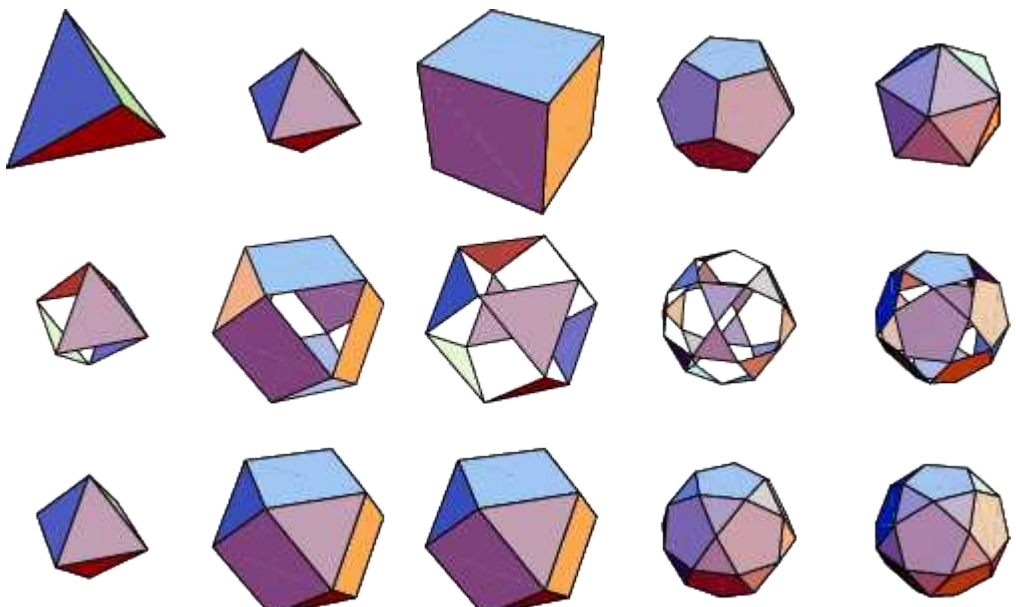


Fig.5: Poliedros determinados por las figuras vértice de los sólidos Platónicos

- Si circunscribimos una esfera en un sólido Platónico, y colocamos un rayo de luz en el centro del poliedro, las aristas del sólido Platónico se proyectan en arcos de círculos máximos (esto es, sobre las geodésicas de la esfera).

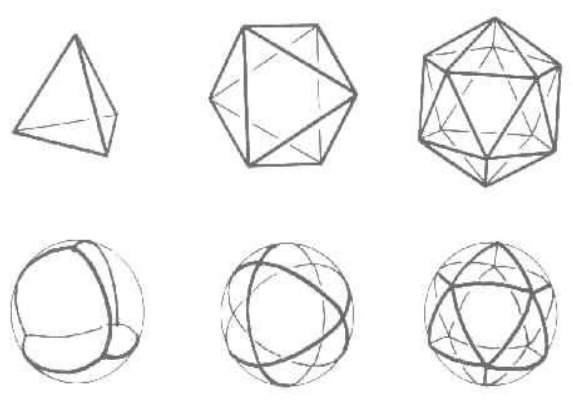


Fig. 6: Proyecciones de las aristas del tetraedro, el octaedro y el icosaedro sobre las esferas circunscritas

- Los sólidos Platónicos pueden además ser proyectados sobre un plano. Esta proyección se obtiene eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro Platónico desde un punto por encima del centro de esta cara. La figura que se obtiene se llama diagrama de Schlegel. También se pueden obtener si rompemos una cara y estiramos las restantes caras sobre la pared, sin romper las aristas (ver Fig. 7). Parte de las características del poliedro (como la conexión entre vértices y lados y algunas de sus simetrías) se preservan en su correspondiente diagrama de Schlegel. Esto facilita el estudio de determinados problemas, tales como los de recorrido y coloración.

En el caso de los sólidos Platónicos estos diagramas son únicos (no depende de la cara desde la que se proyecte).

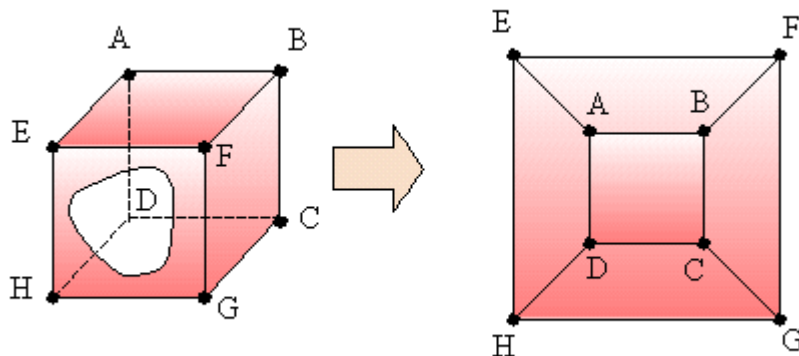


Fig.7: Diagrama de Schlegel del cubo

- Los sólidos Platónicos, aunque son completamente diferentes, están relacionados entre sí por la dualidad. A todo poliedro P le podemos asociar otro, que llamaremos poliedro dual, de forma única, tal que las caras y los vértices de P están en correspondencia biyectiva con los vértices y caras, respectivamente, de su dual. De esta forma si P^* es el dual de P , entonces P es el dual de P^* . Para visualizar el poliedro dual de uno dado, consideramos el poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del poliedro de partida y las caras están formadas por vértices que corresponden a caras adyacentes (ver Fig. 8).

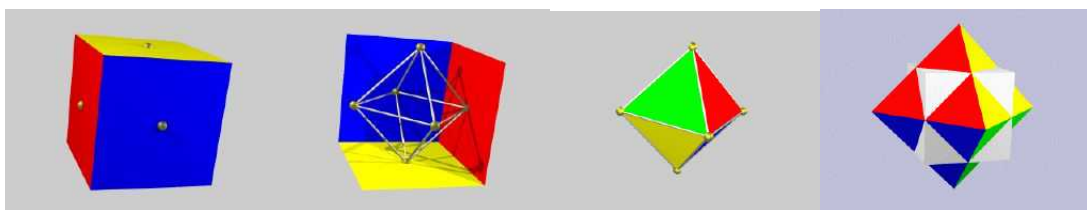


Fig. 8: Dualización del cubo

Entonces, el dual del tetraedro es el propio tetraedro, el dual del cubo es el octaedro y el dual del icosaedro, el dodecaedro.

Nótese que como los centros de las caras de cada poliedro Platónico son vértices de sus duales ellos equidistan de un centro común, con lo que podemos construir una nueva esfera tal que cada cara del sólido de partida es tangente a ella. Por tanto, la esfera inscrita de un sólido Platónico es la circunscrita de su dual.

Como hemos visto, poliedros regulares convexos, sólo hay cinco. Si eliminamos la condición de ser convexo, tenemos 4 más. Éstos son conocidos como los *poliedros de Kepler-Poinsot*.

Kepler en 1619 se dio cuenta de que existían dos maneras diferentes de pegar 12 pentagramas a lo largo de sus aristas para obtener un sólido regular. Si 5 de ellos se unen en un solo vértice, obtenemos el pequeño dodecaedro estrellado (ver Fig. 9). Si son 3 pentagramas los que se encuentran en cada vértice, tenemos el gran dodecaedro estrellado (ver Fig. 10).

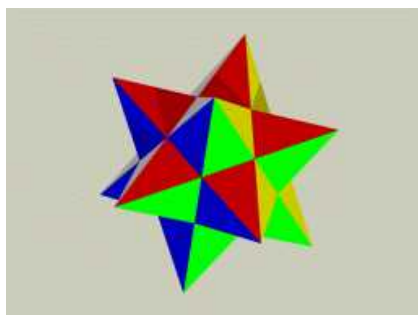


Fig. 9: Pequeño dodecaedro estrellado

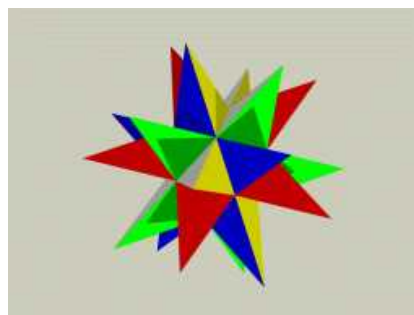


Fig. 10: Gran dodecaedro estrellado

Posteriormente, en 1809 Louis Poincot descubrió los otros dos poliedros no-convexos regulares, el pequeño icosaedro (ver Fig. 12) y el gran dodecaedro (ver Fig. 11). Las 12 caras del gran dodecaedro son pentágonos, pero que, a diferencia del dodecaedro, se intersecan unas a otras. Si observas detenidamente el gran dodecaedro parece que contiene varias estrellas que conforman su estructura, pero sólo se puede ver una. El gran icosaedro se obtiene con 20 triángulos, intersecándose entre sí. Los sólidos de Poincot son de hecho los duales de los sólidos de Kepler.

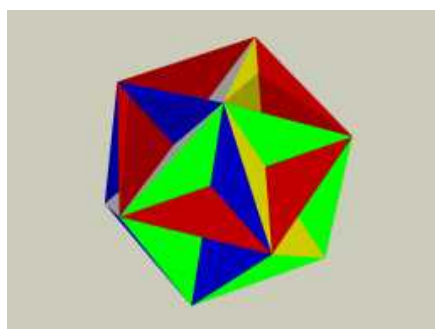


Fig. 11: Gran dodecaedro

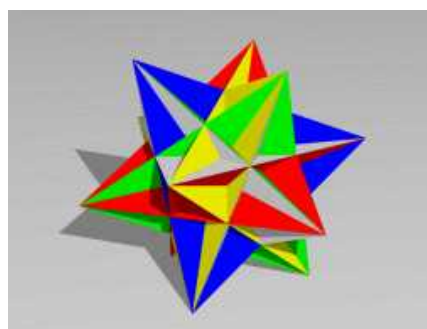


Fig. 12: Gran icosaedro

Todos estos poliedros de Kepler-Poincot pueden ser obtenidos usando el proceso *estelación* a partir de los sólidos Platónicos. Para ello extendemos las caras del poliedro hasta que se intersequen. En el caso 2-dimensional, la estelación consiste en un nuevo polígono que se construye a partir de las extensiones de los lados del polígono original. En la figuras 13 y 14 representamos las estelaciones sucesiva de un octógono y de un octaedro.

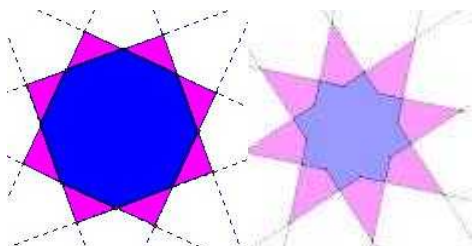


Fig.13: Estelación del octógono

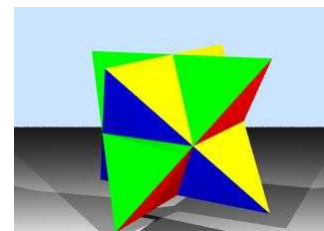
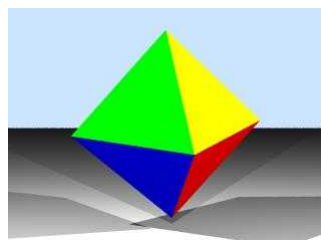


Fig.14: Estelación del octaedro

Dependiendo del poliedro (polígono), éste puede que no tenga ninguna, sólo una, o varias estelaciones sucesivas. Por ejemplo, el triángulo y el cuadrado no presenta estelaciones, el pentágono tiene una, y el heptágono y el octógono tienen dos.

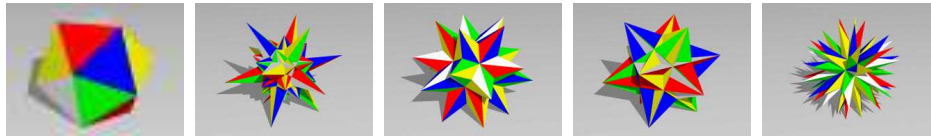


Fig. 15: Algunas estelaciones del icosaedro

En el caso de los poliedros, el tetraedro y el cubo no tienen estelaciones, el octaedro una, el icosaedro 59 (entre las que está el gran icosaedro) y el dodecaedro 3 (el resto de los poliedros de Kepler-Poinsot).

El descubrimiento de que los sólidos de Kepler-Poinsot son estelaciones de los sólidos Platónicos se debe a Cauchy (1811). De hecho, Cauchy probó que los sólidos Platónicos conjuntamente con los sólidos de Kepler-Poinsot son los únicos sólidos regulares (iguales caras y figuras vértices).

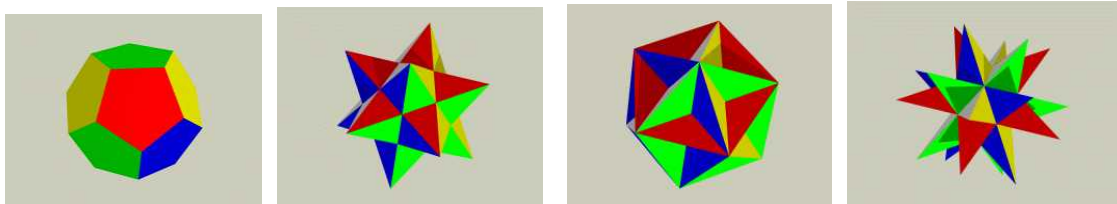
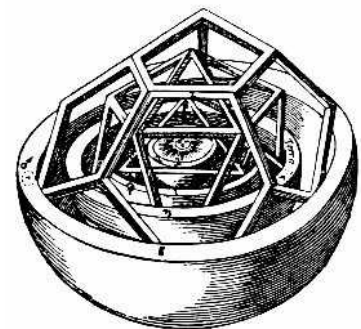
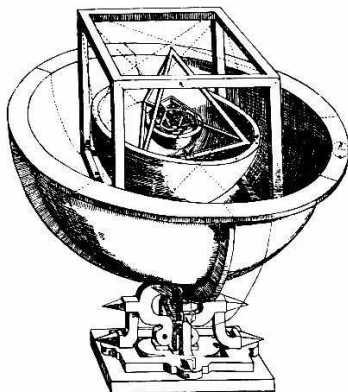


Fig. 16: Estelaciones del dodecaedro

Kepler estuvo muy interesado por las propiedades de los sólidos Platónicos, ya que éstos le permitieron elaborar una teoría cosmológica (en su libro *El secreto del Universo*), justificando que las hipótesis de Copérnico sobre la configuración del universo resultan apropiadas.



En la época de Kepler sólo se conocían 6 planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. La mano de un Dios geómetra debía vincular la existencia de estos 6 planetas con los cinco sólidos Platónicos. Para ello, Kepler da una visión del sistema solar que consiste en sólidos Platónicos inscritos en esferas cuyos radios estaban relacionados con las órbitas de los planetas (*el misterio cósmico*): dentro de la órbita o esfera de Saturno, inscribió el cubo, y en el interior de éste la esfera de Júpiter circunscrita a un tetraedro. En la esfera inscrita de este tetraedro situó la órbita de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra el dodecaedro; entre la Tierra y Venus, el icosaedro y entre Venus y Mercurio, el octaedro. En el centro del sistema colocó el Sol.

Como una anécdota más que refleja el interés que en Kepler despertaron los sólidos Platónicos, recordamos aquí la ingeniosa explicación de la relación Platónica entre los sólidos Platónicos y los elementos naturales: *El tetraedro encierra menor volumen (humedad) en relación con su superficie (sequedad) mientras que el icosaedro encierra el mayor de todos los sólidos platónicos. Por eso identificamos el tetraedro con el fuego y el icosaedro con el agua. El cubo como es el poliedro de mayor estabilidad se identifica con la tierra. El octaedro que, cogido mínimamente se puede hacer girar con facilidad es el aire. Finalmente, el dodecaedro está asociado con el universo porque tiene 12 caras, como 12 son los signos del Zodíaco.*

Como una anécdota más que refleja el interés que en Kepler despertaron los sólidos Platónicos, recordamos aquí la ingeniosa explicación de la relación Platónica entre los sólidos Platónicos y los elementos naturales: *El tetraedro encierra menor volumen (humedad) en relación con su superficie (sequedad) mientras que el icosaedro encierra el mayor de todos los sólidos platónicos. Por eso identificamos el tetraedro con el fuego y el icosaedro con el agua. El cubo como es el poliedro de mayor estabilidad se identifica con la tierra. El octaedro que, cogido mínimamente se puede hacer girar con facilidad es el aire. Finalmente, el dodecaedro está asociado con el universo porque tiene 12 caras, como 12 son los signos del Zodíaco.*

Un poliedro convexo es *semi-regular* si sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos. A estos sólidos se les llama sólidos *Arquimedianos*, ya que se cree que fueron descubiertos por Arquímedes, aunque no se tiene ninguna prueba documental que lo acredite. Existen 13 sólidos Arquimedianos. Siete de ellos se obtienen por truncamiento de los sólidos Platónicos, es decir, por cortes de las esquinas, acción que se puede ejecutar de distintas maneras. Así, los denominados con los nombres de los sólidos Platónicos de origen

más el término “truncado”, se obtienen al dividir cada arista en tres partes y cortar por estas divisiones. Si dividimos la arista a la mitad y truncamos, sólo obtenemos dos nuevos poliedros: el cuboctaedro y el icosidodecaedro. Sus nombres se deben al hecho de que al realizar el proceso de truncamiento que acabamos de describir, en el caso de un cubo y de un octaedro (respectivamente, icosaedro y dodecaedro) obtenemos el mismo poliedro. Este fenómeno está relacionado con la dualidad entre los sólidos Platónicos. Si realizamos este proceso de truncamiento al tetraedro, obtenemos de nuevo un tetraedro (recuerda que el dual del tetraedro es de nuevo un tetraedro).

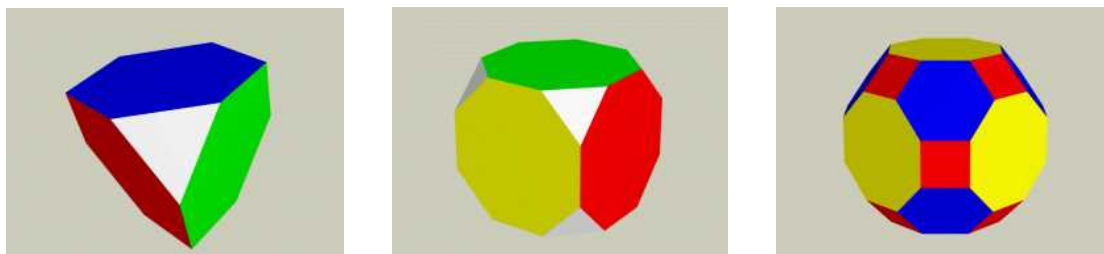


Fig. 17: Poliedros Arquimedianos obtenidos por truncamiento de sólidos Platónicos

Un *prisma* es un poliedro formado por dos copias idénticas de un polígono con aristas que conectan sus vértices iguales. Así todas sus caras salvo dos son rectángulos. Un *antiprisma* está generado también por dos copias idénticas conectadas por triángulos equiláteros. El número de prismas y antiprismas es infinito. El cubo es un prisma y el tetraedro es un antiprisma. Dependiendo si el polígono que genera el prisma o el antiprisma es convexo o no, tenemos los prismas (antiprismas) convexos o no-convexos (ver Fig 18 y 19).

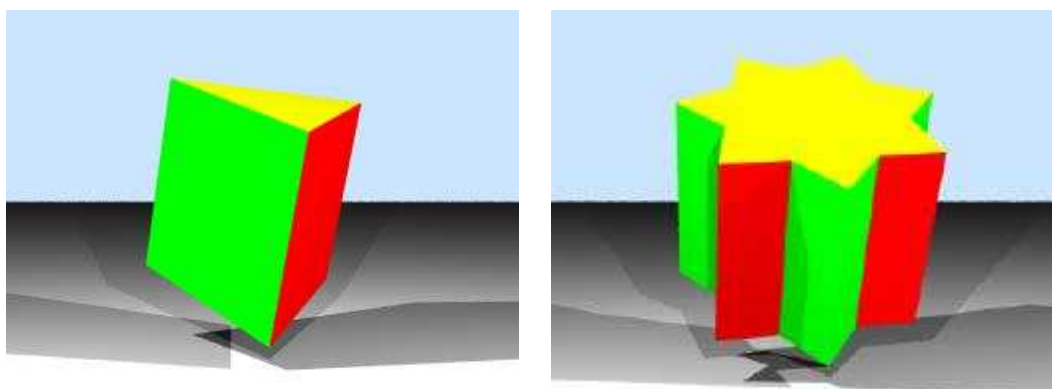


Fig. 18: Prismas

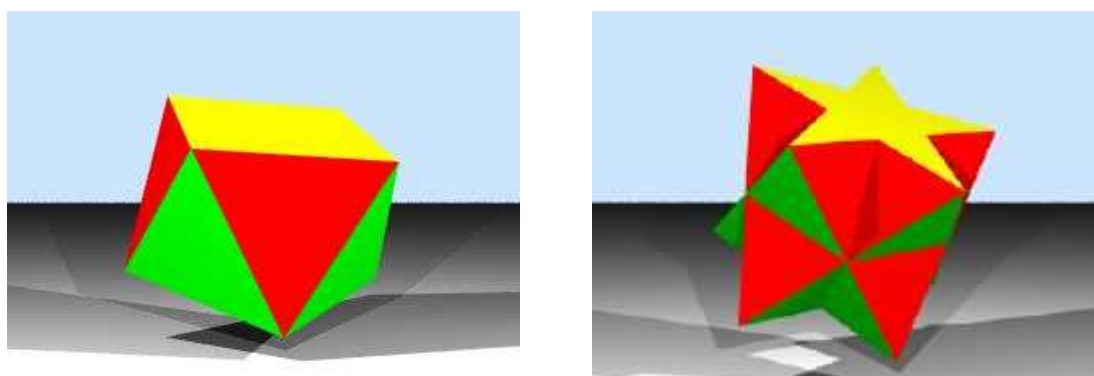


Fig. 19: Antiprismas

Si las caras de un poliedro son triángulos congruentes equiláteros estamos ante un *deltaedro*. El más pequeño de los deltaedros es el tetraedro con 4 caras. Teniendo en cuenta que un poliedro no puede tener más de 5 triángulos alrededor de un vértice, el número de caras de un deltaedro convexo debe estar entre 4 y 20. De hecho, el número de caras es $3F/2$ (y por tanto, tiene un número par de caras). Además, no se

puede construir un deltaedro de 18 caras. De todo ello resulta que sólo hay 8 deltaedros convexos. Si eliminamos la condición de convexidad, el número de deltaedros es infinito.

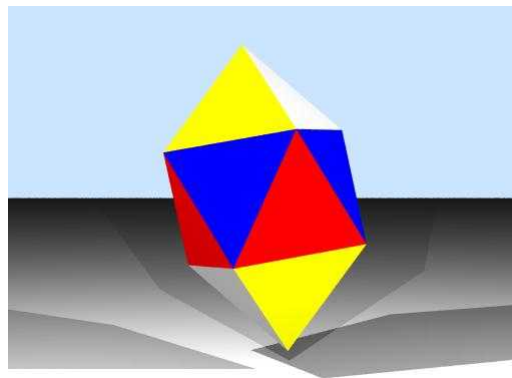
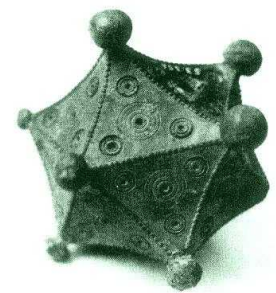


Fig.20: Deltaedro

Poliedros y arte

Los poliedros han sido utilizados en muchas épocas de la historia como elementos decorativos. Sirva como ejemplo el objeto de la época romana que ilustramos en la figura de la derecha.



Pero, quizás el período histórico en el que la conexión entre arte y poliedros ha sido realmente fructífera ha sido el Renacimiento. Muchos de los grandes artistas de la época utilizaron los poliedros como un instrumento para desarrollar ciertas técnicas relacionadas con la perspectiva. Esto supuso el descubrimiento de algunos nuevos poliedros o el redescubrimiento de otros que habían quedado en el olvido. Éste es el caso de Paolo Uccello (1397-1475), pintor florentino e importante mosaiquista, o de Piero della Francesca (1410-1492), pintor renacentista cuyas técnicas sobre la perspectiva fueron olvidadas y atribuidas posteriormente a Luca Pacioli (1445-1514). En su principal trabajo *"De Divine Proportione"* de Pacioli, incorporó los maravillosos dibujos poliedrales de su amigo Leonardo da Vinci (ver Fig. 21) de indudable belleza y realismo, algunos de ellos tomados de modelos huecos en madera. Estos modelos fueron interesantes objetos para aplicar las técnicas relacionadas con la perspectiva.

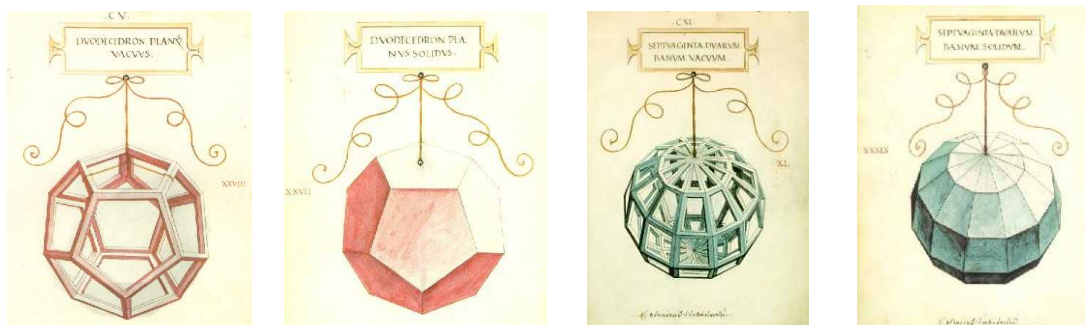


Fig. 21: Grabados de Leonardo da Vinci

También son de esta época (1520) los famosos mosaicos (ver Fig. 22) elaborados con maderas de diversas tonalidades elaborados por Fra Giovanni y en donde se muestran poliedros o esquemas de poliedros.



Fig. 22: Mosaicos de Fra Giovanni

En la escuela alemana Renacentista, algunos de sus más famosos artistas han usado estructuras poliedrales en sus trabajos. Este es el caso de Albrecht Durer (1471-1528), autor de



Fig. 23: Melancolía de Durer

“Melancolía” (ver Fig. 23), cuadro que representa a un frustrado pensador sentado al lado de un romboide truncado, al que se le han buscado diferentes interpretaciones; otro exponente de esta escuela lo encontramos en el orfebre Jamnitzer (1508-1585), uno de los más creativos artistas poliedrales tal y como vemos en las ilustraciones (ver Fig. 24).

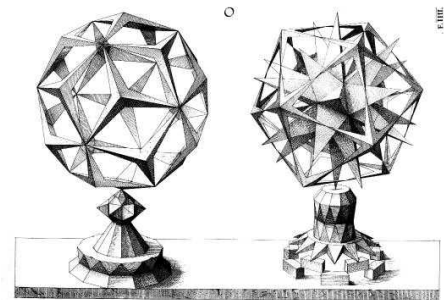


Fig. 24: Esculturas de Jamnitzer

La introducción de estas nuevas estructuras poliedrales supusieron un desarrollo matemático posterior de las mismas.



Fig. 25

Esta conexión entre poliedros y arte ha permanecido a lo largo de la historia de la humanidad, en diferentes manifestaciones artísticas. A continuación citamos ciertas técnicas artísticas que han usado, de alguna forma, las estructuras poliedrales como elementos creativos. Este es el caso de algunos artistas barrocos del siglo XVII que crearon esculturas elaboradas sobre piezas de madera o marfil en las que hacían espirales concéntricas perforadas localizadas en los vértices de ciertos poliedros. Estas esculturas siguen haciéndose en Hong Kong (ver Fig.25).

La papiroflexia es el arte de origen japonés del papel doblado. Diversas construcciones de objetos pueden ser hechas usando una simple hoja de papel colorado. Muchas formas matemáticas pueden ser realizadas usando esta técnica. Este es el caso de los poliedros (ver Fig. 26).

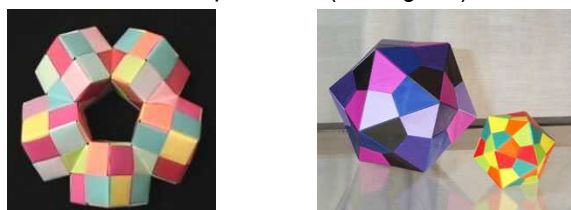


Fig.26 : Poliedros con papiroflexia

El imaginativo Escher creó imágenes en donde se superponen mundos de diferentes espacios en los que incluyó estructuras poliedrales. Su interés por los poliedros pudo estar influenciado por su hermano, geólogo interesado en la cristalografía. Dos de sus obras emblemáticas, donde los poliedros son elementos fundamentales en sus composiciones, son *Waterfall*, en donde aparece la primera estelación del dodecaedro como elemento decorativo en las torres que coexisten en mundos diferentes; y *Stars*, en donde se muestra un cielo poliedral (ver Fig. 27).

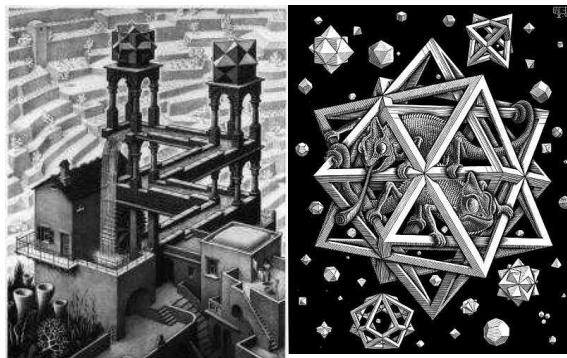


Fig. 27: Escher

Por último, quisiera reseñar cómo la fascinación por los poliedros sigue subsistiendo en algunos de nuestros artistas contemporáneos, como por ejemplo Dalí o Gaudí. Este último utilizó cubos, octaedros y dodecaedros así como truncamientos de estas estructuras poliedrales en la Sagrada Familia. También destacamos, en esta maravillosa pieza arquitectónica de Barcelona, el uso de luces en forma de dodecaedro, en la cripta.



Fig. 28 : Trabajos de Gaudi y de Dalí

Aplicaciones

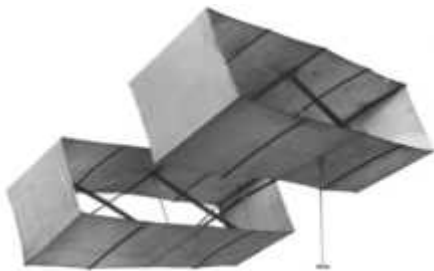
Debajo de todo recubrimiento exterior de cualquier estructura 3-dimensional subyace una forma esquelética que proporciona a la estructura gran parte de sus propiedades. Así por ejemplo, la estructura de un puente está condicionada a la disposición de sus vigas. Estas formas esqueléticas están relacionadas en muchos casos con los poliedros. También a nivel microscópico la estructura química y biológica de la materia está formada por átomos y moléculas unidas en complejas formas espaciales que, en muchos casos, son poliedrales.

La aparición de ciertas estructuras poliedrales en las soluciones de problemas de diversas ramas de la ciencia es uno de los aspectos que han originado el interés de muchos científicos por el estudio matemático de los poliedros desde tiempos remotos. Es esto lo que origina que Platón asocie los 5 sólidos Platónicos con los elementos básicos que configuran el mundo o que Kepler atribuya un significado cosmológico a estas estructuras poliedrales. En los dos últimos siglos, ha surgido un cierto interés por determinados poliedros que están relacionados con problemas de la Física, de la Biología o de la Química. En lo que sigue plantearemos tres de estos problemas así como su vinculación con ciertos poliedros o con algunas propiedades de los mismos.

Cometas poliedrales y la conjetura del fuelle

La primera de estas cuestiones está relacionada con la construcción de cometas. A finales del siglo XIX el ingeniero y astrónomo Lawrence Margrave comienza a interesarse por la aerodinámica con el fin de conseguir un aparato que pudiera volar tripulado por un hombre. Su investigación se centró entonces en resolver el problema de cómo ciertos pájaros eran capaces de remontar el vuelo sin batir las alas. Estas disquisiciones le llevaron a diseñar varias cometas intentando buscar la forma más aerodinámica. Sus primitivas cometas desembocaron en la cometa de caja o celular, basada en el siguiente principio:

Si tenemos dos o más superficies una encima de otra, se logra una mayor sustentación que con una sola superficie más larga.



Concluye entonces que la cometa de dos celdas rectangulares es la más estable y con mayor empuje. Esta cometa es la base del diseño de la mayoría de las cometas meteorológicas que se desarrollaron con posterioridad. Sin embargo, este tipo de cometas tiene un problema de construcción: para adquirir su forma necesitan unos segmentos diagonales que tensen y den rigidez a la estructura.

Fig. 29: Cometa celular

Es por ello que a principios del siglo XX, Alexander Graham Bell (más conocido por ser el inventor del teléfono) inicia sus estudios en la búsqueda de cometas con estructuras más rígidas. En 1903, la revista *Nacional Geographic Magazines* publica el artículo de Bell "*The tetrahedral Principle in Kite structures*", en el que explica cómo la estructura de la cometa celular en forma triangular, aunque tiene mayor superficie, es más rígida al no necesitar ningún tensor diagonal. Tras hacer varias pruebas concluye que partiendo de una celda longitudinalmente rectangular, mejora sus resultados si en todas las direcciones hacemos que posea forma triangular, esto es, una celda en forma de tetraedro es la más óptima para sus intereses. En 1905, una cometa de 1300 celdas con un peso de 57 kilos eleva por accidente a uno de los manipuladores hasta una altura de 10 metros. Este hecho hizo albergar en Bell esperanzas en la construcción de cometas más potentes. Sin embargo, los avances de la aeronáutica siguieron otros derroteros.

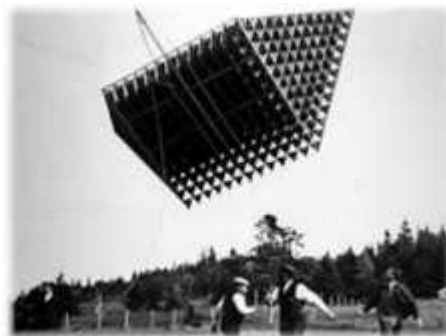


Fig.30: Cometas de A. Graham Bell

Los problemas relacionados con la rigidez de las cometas tienen que ver con las propiedades de rigidez de los poliedros. Cuando construimos los sólidos Platónicos con palillos, notamos que el tetraedro, el octaedro y el icosaedro se mantienen firmes, pero las estructuras asociadas al cubo y al dodecaedro no son tan estables.

Consideraremos que un poliedro es rígido si podemos hacer cambiar la forma sin modificar la longitud de las aristas que lo configuran. El problema de la rigidez de los poliedros ha tenido intrigado a los matemáticos durante varios siglos.

Pero, ¿cómo hacer que un poliedro que es flexible, se convierta en rígido? La respuesta es clara: incluyendo más aristas. Pero nos interesa introducir el menor número de aristas. Si el poliedro de partida tiene V vértices, esto es, a priori tiene $3V$ grados de libertad (ya que cada punto tiene tres coordenadas). Pero cada vez que añadimos una arista, ligamos la estructura con lo que, de hecho, menos son los grados de libertad. En una primera aproximación podríamos pensar que $3V$ aristas hacen al poliedro rígido. Pero un cuerpo rígido puede ser trasladado a una nueva localización o rotado, por lo que no es necesario fijar todos los vértices. Imaginemos cuatro vértices. Las coordenadas del primer vértice son totalmente libres para posibles traslaciones. Una vez colocado el primer punto, las coordenadas del segundo pueden pertenecer a una esfera de centro el primer vértice así que dependen de dos parámetros. Por último, el tercer vértice puede localizarse en un círculo de eje la arista que une los dos primeros vértices. Así, hay 6 coordenadas que no es necesario fijar para describir el poliedro de un total de 9. Pero este no es el mínimo número de aristas que necesita para ser rígido es $4.3 - 6 = 6$, esto es, el tetraedro. La preocupación por encontrar buenos acotadores del número de aristas que hay que introducir para garantizar la rigidez del sólido es un problema que ha preocupado a ingenieros y matemáticos.

La condición de rigidez se puede hacer más restrictiva. En este caso entendemos que un poliedro es flexible cuando puede cambiar de forma sin que se deformen sus caras (las suponemos, por ejemplo, de metal). Cuando el poliedro se flexiona sólo cambian los ángulos con los que se cortan las caras. Es como si en las aristas pusieramos bisagras. Con esta nueva definición de rigidez incluimos la categoría de los poliedros convexos (lo cual fue probado por Cauchy en 1813, aunque 50 años después se descubrió que su demostración tenía errores). Hasta hace poco se daba por supuesto que todo poliedro con caras triangulares era rígido ya que el triángulo es el único polígono rígido. Pero esto no es cierto. En 1897, un ingeniero francés, Raoul Bricard descubrió que los poliedros no convexos podrían ser flexibles si se permitiera que sus caras pasasen unas a través de otras (lo cual es imposible para cualquier objeto real). Posteriormente, Connelly (1978) modificó el poliedro no convexo de Bricard eliminando el problema de la auto-intersección de las caras y obteniendo el primer ejemplo de poliedro flexible real (formado por 18 caras triangulares). Recientemente, Steffen obtuvo otro ejemplo de poliedro flexible de 9 vértices y 14 caras triangulares (ver Fig. 31).

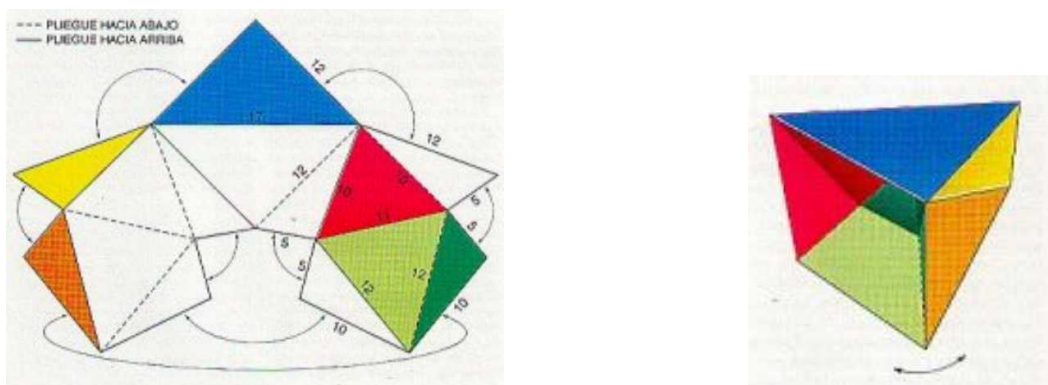


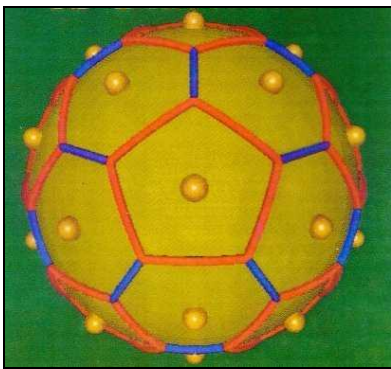
Fig. 31: Poliedro flexible de Steffen

La flexibilidad de un poliedro parece indicar que intuitivamente el volumen total del poliedro flexible permanece cuando cambia de forma. Sin embargo, este hecho ha sido una conjetura (*la conjetura del fuelle*) durante muchos años. La conjetura del fuelle para poliedros es sorprendente, ya que la correspondiente versión en dimensión 2 es falsa. En efecto, si, por ejemplo, flexionamos un rectángulo, su área cambia. Parece que el espacio tridimensional no admite fuelles poligonales.

Experimentalmente la conjetura del fuelle fue “demostrada” por Dennis Sullivan, perforando un agujero diminuto en un poliedro flexible lleno de humo y comprobando que no salía humo cuando lo flexionaba. La prueba matemática se presentó en 1997 por Sabitov, Connelly y Walz. La idea de la demostración es dar una fórmula general que permitiera obtener el volumen de un poliedro cualquiera en términos de las longitudes de sus aristas y de las áreas de las caras. Esto implicaba que el volumen sólo dependía de estos parámetros y por tanto, la conjetura del fuelle es cierta (en la flexión del poliedro no varían las caras).

Los problemas de Thompson o Tammes: historias de un electrón, un grano de polen y un satélite

A continuación, describiremos diversos problemas que están enmarcados en un mismo contexto y en cuyas soluciones aparecen estructuras poliedrales. Comencemos con el problema de Thompson relacionado con sistemas descritos por partículas puntuales sometidas a fuerzas que interactúan. Estamos interesados en la descripción de ciertos estados de equilibrio. Veremos que éstos vienen definidos por poliedros en donde las partículas se sitúan en los vértices.



Para empezar consideraremos el caso de n partículas cargadas sobre una esfera unidad, interactuando sólo a través de sus fuerzas de Coulomb. El hecho de que las partículas estén sobre la esfera supone una ligadura sobre las posiciones de las partículas. Si x_i denota la posición de la partícula i entonces la ligadura de estar sobre la esfera se re-escribe $|x_i| = 1$. El potencial de Coulomb es dado por

$$E = \sum_{i < j} 1/|x_i - x_j|$$

Se trata de encontrar la disposición de estas partículas para que esta energía sea mínima. El resultado es una configuración de equilibrio sobre las fuerzas repulsivas. Si hubieran sólo dos partículas, nuestra intuición

nos indica que para alcanzar este estado de equilibrio, las partículas se sitúan en los polos. Si $n=3$, se sitúan en un triángulo equilátero sobre un círculo máximo de la esfera. Para $n=4$ la configuración buscada es la de un tetraedro, para $n=6$ es un octaedro y para $n=12$ un icosaedro. En general, para n mayor que 4, obtenemos que los electrones se sitúan en los vértices de un poliedro que, en muchos casos, es un deltaedro. Para $n=8$ y para $n=20$ no se obtienen el cubo y el dodecaedro. Así que la mayoría de las configuraciones simétricas no son de mínima energía. Para n grandes, las soluciones a este problema se obtienen por métodos numéricos. De hecho, este problema es un buen test de la eficacia de algunos de estos métodos numéricos.

Este problema está relacionado con el del botánico Tammes (1930), que quería determinar la distribución de n poros en un grano de polen de manera homogénea. De forma más precisa, el problema consiste en conocer la distribución uniforme de n poros en un grano de polén, de tal manera que la mínima distancia entre los poros $\min |x_i - x_j|$ (por los caminos más cortos) sea la máxima posible. Este mismo problema se podría también plantear como sigue (problema de la esfera parcheada) : encontrar el mayor diámetro de n círculos sobre una esfera tal que al colocarlos no se solapen. Es el caso de un satélite lanzado en 2001 y al que se le colocó 1500 espejos circulares para que reflejara la luz solar con el fin de poderle seguir la pista.



Los problemas de Tammes y de Thompson pueden describirse dentro de un contexto más general si consideramos la función energía para n partículas como

$$E(p) = \sum_{i < j} 1/|x_i - x_j|^p$$

con p un número entero no nulo. Si p es positivo nos planteamos minimizar $E(p)$ y si p es negativo maximizarlo. El problema de Tammes puede considerarse el caso en que $p = -\infty$. El caso de $p=1$ corresponde con el

problema de Thompson. Existen otros problemas interesantes que se encuadran dentro de este mismo contexto, pero a los que no haremos alusión aquí.

Las soluciones (poliedrales) exactas a todos estos problemas se conocen sólo para algunos valores de n . Así, en el problema de Tammes se conocen el caso $n=2-12, 24$ y en el problema de Thompson para $n=2-12, 14, 24$. Para resolver el resto de los casos se usan diversos métodos numéricos. Una curiosidad sobre los resultados que hasta ahora se han obtenido es que para $n>6$, los resultados numéricos sugieren que la única solución poliedral común a los problemas de Thompson y Tammes es el icosaedro para $n=12$.

¿Conocen las abejas las propiedades de los poliedros?

Ya hemos visto cómo los poliedros son configuraciones ligadas a la naturaleza (la naturaleza busca la forma de obtener el mejor rendimiento con el mínimo esfuerzo). Otro ejemplo de esa situación es el que pasamos a describir a continuación.

Cuando las abejas se ponen a construir las colmenas donde almacenan la miel, buscan la forma de obtener la mayor rentabilidad: mayor superficie y capacidad de la celda usando la mínima cantidad de cera en la construcción de la misma. Es por ello que sus paneles están formados por celdas que determinan un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados. Esto se puede conseguir con celdas triangulares, cuadradas o hexagonales. De estas tres formas, si suponemos que el perímetro es el mismo, la que tiene mayor superficie es el hexágono. Por eso las celdas de las colmenas tiene forma hexagonal. Sin embargo, las celdas no son prismas hexagonales. Para cerrar la celdilla usan la estrategia de almacenar la misma cantidad de miel que una celda en forma de prisma hexagonal, pero usando la mínima cantidad de cera. Por ello cierran la celda por uno de los extremos con tres rombos de tal forma que el volumen que encierra la celdilla es el del prisma hexagonal pero el área total de la celda es la menor posible. El ángulo de inclinación de los rombos es exactamente ($70^{\circ} 31' 43.606''$) con el que se consigue minimizar el área del poliedro (un rombododecaedro) que presentamos en la figura 32.

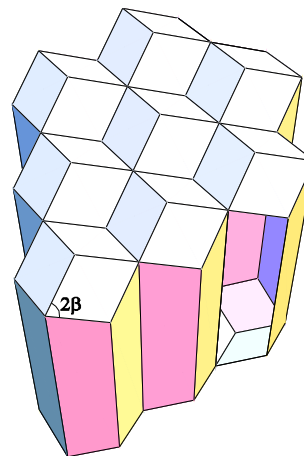
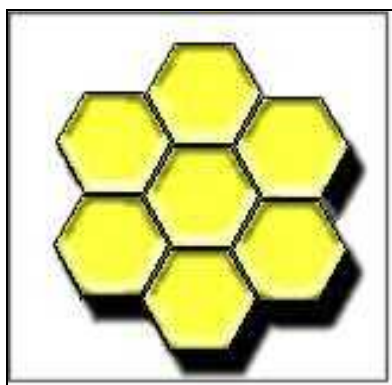


Fig 32: Cedillas de las abejas

Referencias Bibliográficas

Algunas páginas Web relacionadas con poliedros

<http://www.georgehart.com> Página elaborada por George Hart en la que incluye una completa enciclopedia sobre poliedros así como numerosos enlaces relacionados con poliedros.

<http://www.peda.com> Página que incluye una versión demo del programa poly para ver diversos poliedros convexos así como sus desarrollos en el plano.

<http://mathworld.wolfram.com> Página que incluye información de ciertos temas relacionados con las matemáticas, entre ellos los poliedros. Ofrece muchos datos puntuales sobre poliedros y temas relacionados.

<http://www.geocities.com/SoHo/Studios/origami.html> Bellos diseños de poliedros con papel plegado (papiroflexia)

<http://www.physics.orst.edu/~bulatov> Página de Vladimir Bulatov en la que incluye una gran cantidad de curiosidades sobre poliedros como el calidoscopio poliedral, estelaciones de poliedros, representaciones no usuales de poliedros conocidos... etc.

<http://home.teleport.com/~tpgettys> Página de Tom Getty que incluye bastante información sobre diferentes tipos de poliedros.

<http://www.arrakis.es/~mcj/abejas.htm> Página en donde se recoge un artículo de José Carrión Beltrán relacionado con la construcción de las estructuras poliedrales de los panales de abejas.

<http://usuarios.lycos.es/jmsuay> Página de Suay Berenguer sobre las cometas. Incluye la cometa tetraédrica de A. Graham Bell.

Algunos Libros y artículos

[AS] M. Atiyah, P. Sutcliffe: Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, aparecerá en Milan Journal of Math. (2003), disponible en <http://xxx.unizar.es> con la referencia arXiv:math-ph/0303071.

[C] P.R. Cromwell: Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.

[EHR] J.I. Extemiana, L.J. Hernández, M.T. Rivas: Poliedros , prepublicación (2001), disponible en <http://www.unirioja.es/dptos/luherman/div.html>

[K] J. Kappraff: Connections, Series on Knots and everything, vol. 25. World Scientific Pub. 2001

[Ga] J. L. García Hourcade: La rebelión de los astrónomos: Copérnico y Kepler, colección Científicos para la historia, 1 Nivola, 2000.

[Go] P. M. González Urbaneja: Pitágoras, filósofo del número, colección La Matemática en sus personajes, 9 Nivola, 2001.

[M] A. Montesdeoca: Las abejas utilizan ciegamente las matemáticas. Prepublicación 1998.

[S] I. Stewart: La conjetura del fuelle, Investigación y Ciencia, 264, 1998.