

Il concetto di infinito

Massimo Mugnai

Il problema dell'infinito si pone prima di Aristotele in varie forme. Si pone con i cosiddetti pre-socratici. Forse propriamente non va chiamato infinito, loro parlano di apeiron che potrebbe significare indefinito, indeterminato e cose del genere. Platone parla di infinito, ma non ha un grande ruolo la riflessione sull'infinito di Platone salvo che, in qualche modo, Platone fissa un problema che è costituito dal rapporto tra un esemplare, l'idea, e le sue concretizzazioni: per esempio una idea di distanza e le molteplici distanze. La molteplicità e l'infinito hanno un ingresso nella filosofia platonica a questo livello.

Altro discorso per Democrito e Leucippo, i quali ammettono un infinito attuale, cioè ammettono un'infinità di atomi. Il mondo è fatto da una infinità di atomi e quindi ammettono una pluralità infinita. Poi c'è Anassagora. Insomma: il problema dell'infinito è vivo prima ancora di Aristotele, ma è solo con Aristotele che nella tradizione occidentale, relativamente al problema dell'infinito, si fissano un canone ed una soluzione rimasti fondamentali.

Già Platone si era occupato di problemi in qualche modo relativi all'infinito (*Ti-meo* 33-34; *Filebo* 15b, *Parmenide* 132); ma questi sono i punti di riferimento molto generali. È però con Aristotele che lo studio del problema dell'infinito assume un impianto sistematico.

Dice Aristotele, nella *Fisica* (Aristot. *Phys*, III, 4, 203b 30-204a 7), che “l'indagine che riguarda l'infinito presenta difficoltà, infatti sia a porre che esista, sia a porre che non esista, ci si imbatte in numerose contraddizioni (...) si pone inoltre la questione di cosa sia: se è sostanza o attributo a una qualche natura”.

Qui c'è una dicotomia importante. Aristotele accenna all'ipotesi che l'infinito sia una sostanza; il mondo di Aristotele si divide in sostanza e attributi, e lui prende in considerazione che sia un attributo essenziale o una qualche natura oppure se non è né l'una né l'altra quindi se è un attributo accidentale: “oppure se non è né l'una né l'altra cosa, ma nondimeno esiste un infinito o cose infinite in numero”.

Questo è il problema che si pone Aristotele.

“In primo luogo bisogna, dunque, definire in quanti modi si dice infinito”. L'osservazione di Aristotele è che, innanzi tutto, l'infinito è ciò che in natura non può essere percorso. E questo significa che per natura non si può percorrere un tutto come

la voce è invisibile. Inoltre ciò che non si può percorrere è senza fine. Inoltre “tutto ciò che è infinito lo è o mediante composizione o mediante divisione o mediante entrambe”. L’idea in qualche modo è che l’infinito lo si raggiunga per composizione, per aggiunta di parti oppure per scomposizione di parti, togliendole via, o per entrambe.

E allora qui definisce che cosa intende per infinito mediante composizione, e dice:

“L’infinito mediante composizione è in certo modo il medesimo dell’infinito mediante divisione; nella cosa limitata infatti l’infinito mediante composizione si produce all’inverso dell’altro. Nella misura in cui, infatti, ciò che viene diviso viene diviso all’infinito, in tale misura l’aggiungere successivamente sembra ricostituire la cosa limitata” (Aristot. *Phys*, III, 6. 206b, 3-6).

L’idea di Aristotele è che io ho un oggetto naturale, un pezzo di legno, allora io posso, per composizione, estenderlo all’infinito. Partendo dal finito, per aggiunta di parti finite, posso arrivare all’infinito.

Qualunque pezzo finito io abbia, se scelgo l’unità è certo che in un numero finito di giustapposizioni di questa unità arrivo ad esaurire l’oggetto che sto considerando. Però potrei prima sommarne la metà e poi dalla metà al tutto sommare sempre parti però minori della metà che dovrei aggiungere. In questa maniera ho un processo all’infinito e arrivo a non esaurire mai il pezzo che ho davanti.

Analogamente per divisione: io ho una pagina, la divido a metà, poi considero una delle due metà, divido a metà quella metà lì, poi la metà dell’altra metà e così via, per quella che Aristotele chiama dicotomia.. In questa maniera lo stesso arrivo ad un processo di divisione infinito. Quindi Aristotele prevede due possibilità: la ricomposizione e la infinità mediante somma o mediante divisione.

Dice: “ad un certo punto sono uguali”, perché si rende conto che al momento della aggiunta, se io non aggiungo continuamente la stessa unità, posso arrivare ad approssimazioni al limite dell’oggetto intero che sto considerando senza raggiungerlo mai. E quindi coglie che l’aggiunzione e la divisione in senso tecnico sono complementari l’una all’altra (in un qualche modo).

E Aristotele considera il numero infinito rispetto all’addizione: cioè dato un numero, posso sempre, aggiungendo un numero, spostarmi all’infinito; mentre l’infinito rispetto alla divisione è lo spazio (cioè dividendo lo spazio io posso continuare all’infinito a dividerlo); l’infinito rispetto all’addizione e alla divisione è il tempo.

Queste sono le tre dimensioni a cui pensa Aristotele.

Qui ci si muove considerando un pezzo finito (relativamente allo spazio): un pezzo finito che si divide. La divisione è protraibile all’infinito: rispetto al numero si può sommare e aggiungere un numero e si va avanti.

Il tempo è infinito sia rispetto all’addizione che alla sottrazione.

Naturalmente abbiamo un problema in Aristotele: come si fa a vivere il tempo dopo che una certa parte di tempo è passata? Qui egli descrive un meccanismo un po’

complicato: cioè associa il tempo allo spazio. Aristotele fissa qui le categorie concettuali della riflessione futura sull'infinito, distingue infinito in potenza ed infinito in atto. Dove "in potenza" non va inteso nel senso di implicare una attualità in potenza, cioè in potenza non è inteso come "nel marmo c'è in potenza la statua". L'infinito in potenza non diviene mai in atto. Ciò non c'è mai un istante in cui l'infinito è tutto presente; questo è il punto importante.

Inoltre le parti dello spazio sussistono, anche se distaccate, mentre le parti del tempo non permangono.

Il numero non ammette massimo (in quanto può essere accresciuto al di là di ogni limite - è infinito rispetto alla somma) sebbene ammetta minimo (è infinito rispetto alla divisione; ha un primo elemento).

Lo spazio ha un massimo (è infinito rispetto alla somma delle parti). Aristotele pensa al fondo come finito dal punto di vista dell'estensione, ma non ha minimo (è infinito rispetto alla divisione).

Il tempo non ha massimo rispetto all'addizione.

Queste sono delle semplici conseguenze che derivano dalla posizione di Aristotele.

Con Aristotele si pone il problema di quale sia la natura ontologica dell'infinito. (Aristotele ne discute nei capitoli 5 "Inattualità dell'infinito" e 6 "Potenzialità dell'infinito" del Libro III della *Fisica*).

"Ora è impossibile che l'infinito sia separabile dalle cose sensibili, essendo una cosa in sé infinita.

È chiaro d'altra parte che l'infinito non può esistere come essere in atto e come sostanza, poiché una qualsiasi delle sue parti, presa a parte, sarà infinita se si può dividerlo".

Ecco, qui rivela che se è una sostanza, le parti della sostanza sono sostanza e quindi l'infinito sarebbe infinito, una parte di infinito sarebbe infinito.

"Infatti essere infinito e l'infinito in sé sono la medesima cosa, se l'infinito è sostanza e non qualcosa in un soggetto. Di conseguenza sarà o divisibile o indivisibile in infiniti, ma è impossibile che la medesima cosa sia una pluralità di infiniti".

Perciò l'idea è questa: se una cosa fosse una pluralità di infiniti si condizionerebbero l'un l'altro e quindi sarebbero finiti.

"Ora allo stesso modo a che la parte dell'aria è aria, anche quella dell'infinito sarà infinita se si suppone sia sostanza e principio".

Quindi questo esclude che sia sostanza.

Dunque è indivisibile in parti. "Ciò però è impossibile per un infinito in atto. Necessariamente dunque sarà una quantità" cioè sarà una proprietà che rientra in una delle categorie diverse dalla sostanza. "L'infinito, dunque esiste mediante attribuzione", cioè è un attributo. "Ma come detto sopra non sarà lui stesso che potrà essere detto principio".

Aristotele qui si contrappone a tutti quelli, compresi i pitagorici, che considerano l'infinito come un principio della realtà.

“Non può essere un principio, lo è bensì ciò al quale viene attribuito. L'aria per esempio”; se l'infinito non è una sostanza, sarà infinito l'oggetto al quale questa proprietà si riferisce; “in generale, infatti, l'infinito consiste nel fatto che ciò che si prende è sempre nuovo, dal momento che ciò che si prende è certamente sempre limitato ma differente”.

Anche se io fisso un'unità e concretamente all'unità di misura aggiungo un pezzo a un pezzo, il pezzo che aggiungo è sempre nuovo perché se aggiungo lo stesso pezzo a se stesso non ho nessun progresso.

“Di conseguenza, non bisogna prendere l'infinito come un individuo particolare, per esempio un uomo o una casa, ma allo stesso modo in cui si parla di una giornata o di una lotta, le quali hanno l'essere non come qualche sostanza particolare” (Aristot. *Phys*, III, 206a, 27-32).

Questo sarà un passo che verrà commentato da Tommaso e da tutti i medievali, quindi l'infinito ha un carattere di tipo modale, una lotta, oppure un evento, una giornata; non sono qualcosa di sostanziale, di fissabile. L'infinito ha lo stesso tipo di natura; quello che poi Locke per esempio chiamerà “natura modale”.

“Togliendo l'infinito che esisterebbe in atto nel senso dell'accrescimento, considerato come qualcosa che non può essere attraversato, l'argomento non sopprime la concezione dei matematici”.

E qui c'è un punto molto importante perché Aristotele distingue la nozione di infinito attuale. L'osservazione è questa: se io tolgo l'infinito, cioè non prendo in considerazione l'infinito che esiste in atto nel senso di accrescimento, qui considerato come qualcosa che non può essere attraversato, l'argomento, la mia soluzione non sopprime la concezione dei matematici. In realtà, questi non hanno bisogno e non fanno uso dell'infinito, bensì soltanto di grandezze tanto grandi quanto vogliamo ma limitate (qui emerge l'idiosincrasia, un po' l'ostilità che i matematici greci hanno verso l'infinito, anche se poi altri autori come Archimede hanno trattato l'argomento).

Questa è l'idea: si ha sempre a che fare con grandezze grandi quanto si vuole ma sempre limitate e questo vuole dire che per qualunque grandezza io consideri, è sempre possibile trovarne una più grande, andare oltre.

I matematici non hanno bisogno di fare considerazioni sull'infinito in sé, su oggetti di per sé infiniti, ma su oggetti esemplari, per esempio una certa linea, un certo spazio e così via.

“Ora la divisione effettuata su una grandezza molto grande va applicata ad un'altra grandezza a piacere - per la dimostrazione, infatti, sono poco importanti le grandezze reali. Quindi c'è un riferimento a un procedimento astratto tipico del matematico. Per esempio il matematico fa una riflessione su una linea di una certa grandezza e poi dice: “Questa riflessione può essere applicata a qualsiasi altra grandezza a pia-

cere in quanto gli enunciati matematici hanno valore generale; anche se si ragiona su un esempio, c'è una forte generalizzazione e si dice che questo qui vale per tutti i casi. Quindi diciamo in qualche modo che la generalizzazione è implicita all'interno del ragionamento matematico.

Quindi, per ricapitolare le considerazioni svolte fin qui, è evidente che per Aristotele non esiste l'infinito in atto. La materia non è divisa in un'infinità di parti. Il che significa che, se io prendo un pezzo di legno e lo divido in dieci pezzi, l'atto che segue ogni mia decisione è un atto limitante. Mi trovo davanti a 10 pezzi, non a infiniti pezzi.

Ma dalla mia locuzione si comprende che potenzialmente posso dividere all'infinito. Di fatto realmente posso dare una configurazione di un certo tipo o di un altro tipo.

Le parti in cui è divisa sono un numero grande, ma finito in ogni istante, la materia è infinitamente divisibile, nel senso che può sottostare nel tempo a un numero infinito di divisioni.

C'è un paragone molto interessante: si pensi a una campana che suoni in ogni istante. In ciascun istante il suono è attuale, ma soltanto potenzialmente infinito. Non c'è un momento per poter ascoltare tutti i suoni contemporaneamente. La divisione è attuale in ogni istante ma solo potenzialmente infinita.

Questa cosa è importante perché, vedremo, Leibniz rovescia completamente questa situazione, assumerà che in ogni istante la materia è divisa all'infinito, negando appunto questo assunto fondamentale aristotelico.

Perché questa distinzione tra infinito in atto ed infinito in potenza? Per evitare i paradossi di Zenone, rappresentati da Aristotele sempre nella fisica.

Si veda, ad esempio, il secondo paradosso di Zenone, quello detto di Achille: il più lento nella corsa non sarà mai raggiunto, poiché quello che segue deve sempre cominciare a raggiungere il punto dal quale è partito quello che fugge, in modo che il più lento ha sempre qualche vantaggio.

Come conclusione del ragionamento si ricava che il più lento non verrà raggiunto dal più veloce.

Di conseguenza la soluzione sarà la medesima: si ha una conclusione tra divisibilità in potenza e divisibilità in atto. Quanto a pensare che colui che è davanti non sarà mai raggiunto, è falso. In realtà, nella misura in cui è davanti non è raggiunto, ciò quando parte, ma sarà raggiunto non appena si conceda che il percorso è una linea finita (ecco l'osservazione che fa Aristotele).

Successivamente il concetto di infinito in autori posteriori ad Aristotele, come Plotino, assume una curvatura diversa. Plotino è importante perché ha recuperato l'idea di infinito metafisico che si salda a un impianto sostanzialmente aristotelico, dando luogo a una prospettiva che si ritroverà nei medievali.

Plotino si appropria del concetto di infinito definito come principio, che Aristotele aveva rifiutato, e lo salda in una problematica aristotelica fondata sulla nozione che quello che riguarda le cose del mondo è diviso tra infinito in atto e in potenza.

Plotino fa una identificazione tra l'uno e l'infinito. L'infinito è una proprietà dell'uno. "L'uno non è limitato, ma neppure infinito come grandezza, poiché dove avrebbe dovuto avanzare o perché qualcosa giungesse a lui che non ha bisogno di nulla?".

L'uno non è esteso, perché, se fosse esteso, implicherebbe l'andare da qualche parte, cioè una relazione spaziale.

Ha l'infinità in quanto potenza non è mai in modo diverso. L'infinità gli appartiene perché non è più di uno e non allude ad un rapporto che limita qualcuna delle cose che gli appartengono. Quindi qui si recupera il senso dell'infinito come indeterminato.

L'infinito è, in questo senso, privo di determinazioni in quanto è uno, non è misurato né è numerabile. Non trova il suo limite né in altro né in se stesso perché altrimenti sarebbe due cose.

Non ha figura, non è rappresentabile, non gli appartengono le forme. Idea di uno come indifferenziato, primigenio e come principio: quello che Aristotele aveva cercato di eliminare.

L'idea dell'infinito è come negazione della privazione. L'uno è privo di qualsiasi determinazione. In questo senso è infinito.

Viene fatta per la prima volta una equazione: "l'Uno non è altro che Dio e quindi è infinito".

Plotino combina la concezione con un punto di vista aristotelico per ciò che concerne il mondo sensibile e già qui parte un problema, che è quello dell'eternità del mondo, che vedremo sarà determinante per la tradizione medievale.

Aristotele crede che il mondo sia eterno e questo per i filosofi medievali e cristiani costituisce un grosso problema, perché se è eterno non può essere creato.

Tommaso d'Aquino sviluppa questo argomento contro l'infinità del mondo nella *Summa teologica*: è contrario alla ragione che ciò che è creato sia infinito; infatti sarebbe una contraddizione che l'essere creato possa essere infinito.

Il problema che riguarda l'infinito si trova trattato in molti filosofi medievali. Si veda, ad esempio, il ragionamento di Giovanni Duns Scoto sul paradosso dei cerchi, risultante dall'assunzione della concezione della retta come costituita da parti. Si hanno due cerchi concentrici: se dal centro traccio i raggi del cerchio più grande, interchetto tutti i punti della circonferenza, ma così facendo interchetto anche tutti i punti della circonferenza più piccola e quindi metto in corrispondenza tutti i punti della circonferenza più piccola con quelli della circonferenza più grande. La circonferenza più grande è fatta dallo stesso numero di punti della circonferenza più piccola. E ciò è contrario alla nostra intuizione della nozione tutto-parte.

I medievali mettono in relazione la nozione classica aristotelica di infinito in atto e infinito in potenza con due altri concetti che sono due concetti chiave della tradizione occidentale riguardo all'infinito: infinito categorematico e infinito sincategorematico.

L'infinito categorematico è quello che ha significato di per sé, quindi è l'infini-

to in atto. Dal punto di vista logico è un'espressione linguistica che individua una classe di oggetti, come "cane" o "cavallo".

L'infinito sincategorematico è potenziale, si perfeziona sempre. È relativo ad elementi linguistici che assumono significati compiuti solo se si applicano a termini categorematici. Il significato di "e" risulta evidente solo se connette due posizioni.

La relazione tra i due significati si può vedere riflettendo su questo esempio: "uomini infiniti corrono" equivale a dire "una infinità di uomini presi collettivamente corrono".

Nell'uso sincategorematico il termine di infinito è preso distributivamente.

Alcuni uomini corrono ma non tanti che non sia possibile che corrano di più. Questo è il significato.

Inteso in un modo categorematico, è un termine comune e significa "la quantità della cosa soggetta a predicato"; come quando si dice "il mondo è infinito". In un altro modo lo si intende sincategorematicamente: il modo in cui il soggetto si rapporta al predicato: è segno distributivo come se dico "alcuni uomini corrono". Qui si sovrappone il concetto di infinito categorematico a quello di infinito in potenza. Quindi il primo diviene attuale ed equivale a tutti i termini messi insieme mentre l'infinito sincategorematico è riferito sempre in senso potenziale.

Con il Rinascimento si ha il recupero della nozione di infinito come principio (avversato da Aristotele).

I rappresentanti principali sono Nicolò Da Cusa e Giordano Bruno.

Il primo scrive "siccome qualsiasi parte dell'infinito è infinita, implica contraddizione trovare un punto in cui si arriverebbe all'infinito (...) Nel numero infinito il 2 non sarebbe minore del 100 se si potesse arrivare all'infinito in atto nel processo ascendente (come la linea infinita). Solo il massimo assoluto è infinito in senso negativo".

Giordano Bruno realizza un recupero interessante dell'infinito, che viene a far parte dell'esistente contro la prospettiva antica del mondo finito.

"Io dico l'universo tutto infinito perché non ha margine, termine, né superficie. Ma ciascuna parte di esso è finita".

Qui c'è la comparazione di Dio all'infinito. C'è l'ingresso dell'infinito a livello naturale.

Galileo elabora un paradosso interessante: dato l'insieme dei numeri naturali, possono essere messi ciascuno in corrispondenza del suo quadrato; per esempio 1 con 1, 2 con 4. Così mettiamo in corrispondenza un infinito con la sua parte propria. I quadrati sono tanti quanti i numeri di cui sono quadrati. È paradossale: abbiamo 2 infiniti in cui uno sta dentro l'altro.

L'infinito diviene poi un importante concetto fisico con Cartesio, il quale ritiene che la realtà naturale è costituita da un pieno di materia su cui Dio applica il movimento e comincia a muoversi in maniera vorticoso, generando frammentazioni di questa materia complessa, di questo aggregato materiale.

Nei *Principi*, al paragrafo 34, arriva a questa idea: “tuttavia bisogna ammettere che in questo moto c’è qualcosa che la nostra anima concepisce esser vero, ma che nondimeno non è in grado di comprendere”.

La materia è un blocco unico come un fluido che si sposta distribuendosi nello spazio; in dipendenza di diverse velocità ci saranno zone più o meno rarefatte. Allora, per riempire le zone più piccole, c’è bisogno che la materia si frammenti in una polvere finissima. Una divisione indefinita che avviene in tante parti che non potremo determinare con il pensiero, alcune tanto piccole da non pensare che possano essere divise in altre ancora più piccole.

Bisogna riempire tutte le grandezze di questi spazi che sono differenti.

C’è una divisione all’infinito in atto della materia. Non dobbiamo dubitare di questa divisione. Noi non siamo in grado di comprenderla ma dobbiamo accettarla per ragioni fisiche.

Nella visione della fisica di Leibniz, la materia aristotelica è identica alla materia sottile di Cartesio. Entrambe sono divisibili all’infinito. Entrambe sono prive di per sé di forma e di moto, entrambe ricevono la forma mediante il moto. La materia è fluido originario, cui si applica il moto; questo è come far bollire nella pentola della polenta. L’effetto del calore genera il movimento della materia.

Le figure sono l’effetto dell’applicazione del moto a questa materia, che è infinita.

Leibniz ha un’altra intuizione: se una persona fosse dotata di sguardo penetrante come una lince, scorgerebbe nelle cose più piccole in proporzione la maggior parte delle cose che conosciamo nelle cose grandi. E se le cose più piccole si spingono fino all’infinito, un qualsiasi atomo sarà come un mondo.

Si apre una porta su un panorama strano: l’infinito entra a far parte dell’esperienza quotidiana. Gli oggetti sono fatti di parti infinite e sono divisibili.

La definizione di Leibniz è data in relazione al concetto di Aristotele: bisogna concepire lo spazio come pieno di una materia originariamente fluida, suscettibile di tutte le divisioni e soggetta anche attualmente a divisioni e suddivisioni all’infinito; ma con questa differenza però: che essa è divisibile e divisa inegualmente in punti diversi a causa dei movimenti che sono già in essa, più o meno conspiranti tra loro.

Essa ha perciò ovunque un certo grado di rigidità, così come di fluidità; non c’è alcun corpo che sia duro al massimo grado tale che ci si trovi un atomo di durezza insormontabile o qualche massa del tutto indifferente alla divisione.

Per Leibniz la struttura materiale del mondo è divisibile all’infinito in un modo determinato. Egli accetta l’infinito attuale, in ogni istante la materia è divisa in una infinità di parti. “Per quanto paradossale ciò possa sembrare, è impossibile avere la conoscenza degli individui e trovare il modo di determinare esattamente l’individualità di una qualunque cosa, a meno di conservarla inalterata; poiché tutte le circostanze possono ripetersi, le più piccole differenze ci sono insensibili e il luogo o il tempo,

ben lungi dal determinarle di per sé, hanno bisogno anch'essi di essere determinati dalle cose che contengono. Ciò che vi è di più considerevole in questo fatto è che l'individuo racchiude l'infinito e solo colui che è capace di comprenderlo può avere la conoscenza del principio di individuazione di questa o quella cosa". Leibniz riafferma, a proposito della dimensione reale della materia e in polemica con Aristotele, che "attualmente la materia è divisa in parti e per qualunque parte piccola a piacere è possibile trovarne sempre una più piccola".

Un albero, un uovo, una pianta sono fatti di una infinità di parti, sono oggetti aggregati non compiuti. Leibniz arriva all'idea che la realtà è divisa in infinito in ogni momento. In ogni momento è possibile andare oltre le parti e però gli oggetti che compongono la realtà sono semplicemente degli aggregati, gli individui non esistono né hanno cittadinanza né nelle considerazioni della fisica, né in quelle della matematica. Sono semplici modi per concepire, strumenti di analisi per il calcolo, ma non sono reali. Le monadi non sono atomi che compongono la realtà; sono condizioni dell'apparire, sono al di là della realtà dell'esperienza.

L'infinito matematico è potenziale (sincategorematico). Qualunque grandezza io do, è sempre possibile spingersi oltre. In Leibniz c'è sempre una prospettiva di tipo interno-esterno: da una parte fissa dei limiti alla nostra conoscenza (no agli infinitesimi), dall'altra fa speculazioni metafisiche impegnandosi a dire come sono le cose.

La relazione di Massimo Mugnai è stata trascritta dalla registrazione magnetica a cura di Giulia Villani; il testo non è stato rivisto dall'Autore.

