Profr. Efraín Soto Apolinar.

# La función cuadrática

En primer semestre estudiamos las ecuaciones cuadráticas. También resolvimos estas ecuaciones por el método gráfico. Para esto, tuvimos que convertir la ecuación en una función igualándola a la variable $y$.

Ahora vamos a estudiar la función cuadrática, pero considerándola como un caso particular de la función polinomial.

**Definición 1**

Función cuadrática

*La función polinomial de grado dos:*

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

*también se conoce como función cuadrática.*

Cuando definimos la ecuación cuadrática utilizamos la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Si la convertimos a función obtenemos:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

De cuerdo a la nueva definición de función polinomial de segundo grado, tenemos que:

$$a_0 = c \qquad a_1 = b \qquad \text{y} \qquad a_2 = a$$

También debes recordar que los nombres de cada término están relacionados a las funciones polinomiales:

$$y = \underbrace{a\,x^2}_{\text{Cuadrático}} + \underbrace{b\,x}_{\text{Lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Independiente}}$$

El nombre de cada término es importante, porque la mayor parte de las explicaciones está basada en estos términos y conceptos.

En matemáticas, como en cualquier otro lenguaje, las reglas y los nombres de cada una de sus partes es muy importante.

**Ejemplo 1**

Indica el término cuadrático, lineal e independiente de cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

- En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos.
- Tú debes ser capaz de identificar a cada uno de los términos.

| **Función** $y = a\,x^2 + b\,x + c$ | **Término** Cuadrático | **Término** Lineal | **Término** Independiente |
|---|---|---|---|
| $y = 2\,x^2$ | $2\,x^2$ | $0$ | $0$ |
| $y = \sqrt{5}\,x^2 + 12\,x - \dfrac{7}{2}$ | $\sqrt{5}\,x^2$ | $12\,x$ | $-\dfrac{7}{2}$ |
| $y = \dfrac{x^2}{5} + x = 100$ | $\dfrac{x^2}{5}$ | $x$ | $-100$ |
| $y = (x-2)(3\,x+5)$ | $3\,x^2$ | $-x$ | $-10$ |

- Observa que en el último caso se requiere realizar la multiplicación indicada para conocer cada uno de los términos.

---

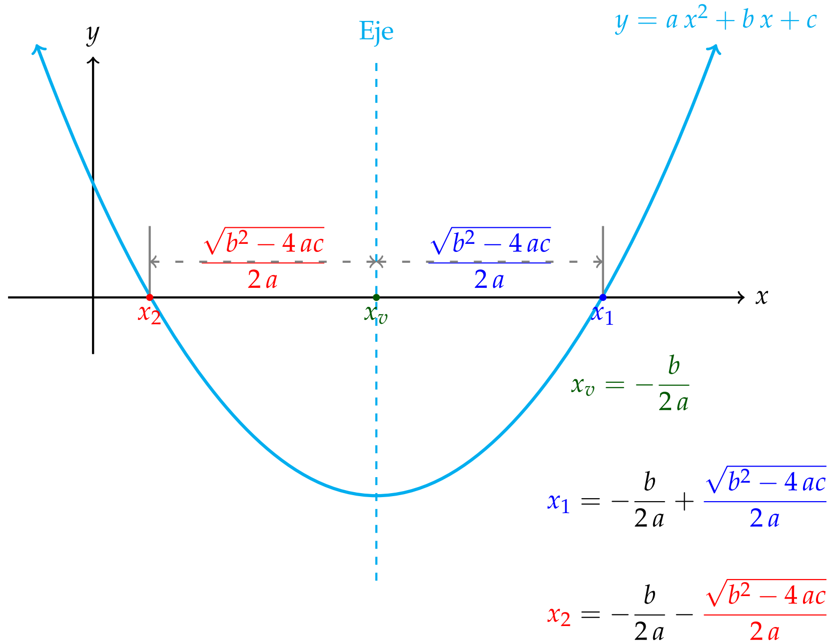
Para calcular las soluciones de la ecuación cuadrática usamos diferentes métodos. Esos mismos métodos son los que vamos a utilizar para encontrar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje $x$.

**Definición 2**

Raíz de una función

*Una raíz de la función $y = f(x)$ es un valor $x_0$ que hace que $f(x_0) = 0$.*
*La raíz de la función también se conoce como el «cero» de la función.*

Solamente para recordar, de nuevo mencionamos la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática, que están relacionadas con la fórmula general y la función cuadrática:




Entonces, si sustituyes $x_1$ ó $x_2$ en la función $y = a\,x^2 + b\,x + c$ obtenemos cero, precisamente porque estos valores son las raíces de la función.

En otras palabras, $x_1$ y $x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Observa de la definición que si al sustituir el valor $x_0$ en la función $y = f(x)$ obtenemos cero, es decir, $f(x_0) = 0$, entonces el valor $x_0$ es una raíz de la función.

**Ejemplo 2**

Calcula las raíces de la siguiente función cuadrática:

$$y = x^2 + 6\,x + 8$$

- Podemos calcular las raíces de la función utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

- Ya sabemos que $a = 1$, $b = 6$, y $c = 8$.
- Así que si sustituimos y realizamos los cálculos obtenemos el resultado buscado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \\ &= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4\,(1)(8)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (32)}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} \end{aligned}$$

- Lo cual puede reducirse a:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm 2}{2} \\ x_1 &= \frac{-6 + 2}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{-6 - 2}{2} = -4 \end{aligned}$$

- Para comprobar que en realidad esos valores son las raíces de la función, sustituimos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= (-2)^2 + 6\,(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0 \\ f(x_2) &= (-4)^2 + 6\,(-4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0 \end{aligned}$$

- Por definición, estas son las raíces de la función.

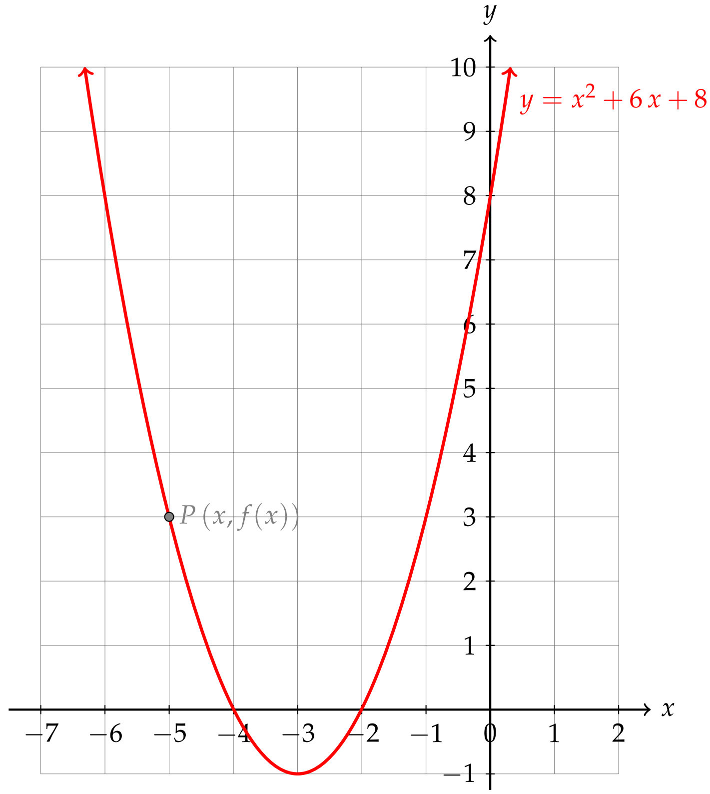
---

Grafica la función:

$$y = x^2 + 6\,x + 8$$

**Ejemplo 3**

- Ahora vamos a graficar la función del ejemplo anterior.
- Sabemos que la parábola abre hacia arriba porque el coeficiente principal es positivo.
- También sabemos que en $x = -2$, y en $x = -4$ la función se hace cero, dado que esas son sus raíces.
- Finalmente, cuando sustituimos $x = 0$ en la función encontramos que $y = 8$.




- Como ya sabes, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales.
- Para calcular el contradominio observa que los valores de $y$ para los cuales la función tiene gráfica empiezan en $y = -1$ y se extienden haste $\infty$.
- Entonces, el contradominio de la función es: $[-1, \infty)$.
- Observa que hemos usado un corchete en lugar de un paréntesis para indicar que el valor frontera $y = -1$ también está en el contradominio de la función.
- Para comprobar que es así, sustituye $x = -3$ en $f(x) = x^2 + 6x + 8$.

---

Como en el caso de las ecuaciones cuadráticas, las funciones cuadráticas *tienen* exactamente dos raíces.

En algunos casos las dos raíces serán reales y repetidas. Esto ocurrirá cuando la parábola toque *tangentemente* al eje $x$. En ese caso, el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ será igual a cero[1].

Finalmente, el caso extremo consiste cuando la gráfica de la función no corta al eje $x$, entonces tendremos dos raíces complejas conjugadas. Es decir, si $x_1 = p + i\,q$, es una raíz de la función, entonces también lo será el valor: $x_2 = p - i\,q$.

**Definición 3**

Conjugado de un número complejo

*Sea $z = a + i\,b$ un número complejo. El conjugado de $z$ denotado por $\bar{z}$ es:*

$$\bar{z} = a - i\,b$$

[1]Regresa a la interpretación geométrica dada algunas páginas atrás.

Calcula las raíces de la función:

$$y = x^2 + 4\,x + 8$$

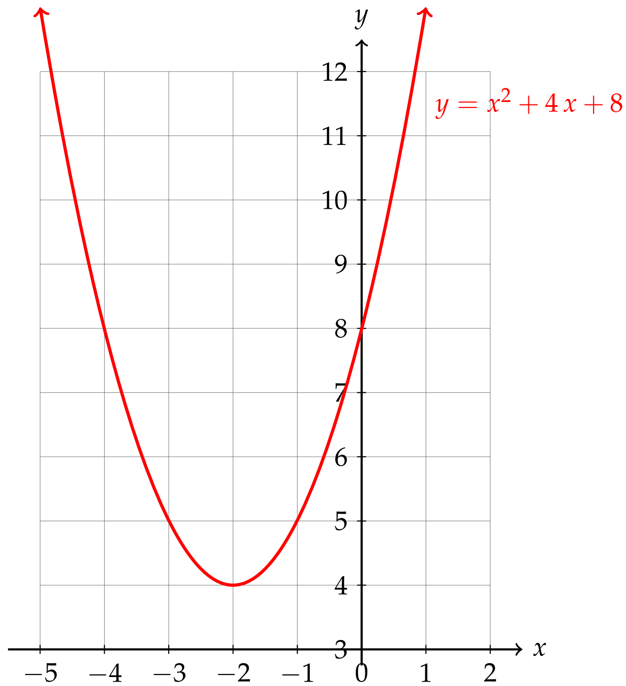
y grafícala.

**Ejemplo 4**

- Ahora utilizamos el método de completar cuadrados.
- Es fácil observar que
$$(x+2)^2 = x^2 + 4\,x + 4$$
- Nosotros vamos a sumar 4 en ambos lados de la igualdad anterior y obtenemos:
$$y = (x+2)^2 + 4 = x^2 + 4\,x + 8$$
- Para encontrar las raíces de la función vamos a igualar a cero la expresión anterior y despejamos $x$:
$$\begin{aligned} y = (x+2)^2 + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= -4 \end{aligned}$$

**Profesor:** Igualamos a cero, porque, por definición de raíz, el valor de $y$ es cero.

- Observa cómo debemos elevar al cuadrado un número y obtener como resultado $-4$.
- Esto nos indica que la gráfica de la función no corta al eje $x$.
- De cualquier manera vamos a calcular sus raíces:
$$\begin{aligned} x + 2 &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= -2 \pm \sqrt{(-1)(4)} \\ &= -2 \pm 2\sqrt{-1} \\ &= -2 \pm 2\,i \end{aligned}$$
- Observa que las raíces de la función son complejas conjugadas.
- Ahora no podemos usar las raíces para graficar la función.
- Es mejor usar la forma que obtuvimos cuando completamos el cuadrado.
- Solamente aplicamos una traslación vertical y una horizontal a la parábola $y = x^2$.




- Ahora indica cuál es el contradominio de esta función. $[4, \infty)$

---

Observa que el mínimo valor que toma esta función es $y = 4$, precisamente cuando $x = -2$.

En otras palabras, el vértice de la parábola corresponde con el mínimo o máximo de una función cuadrática.

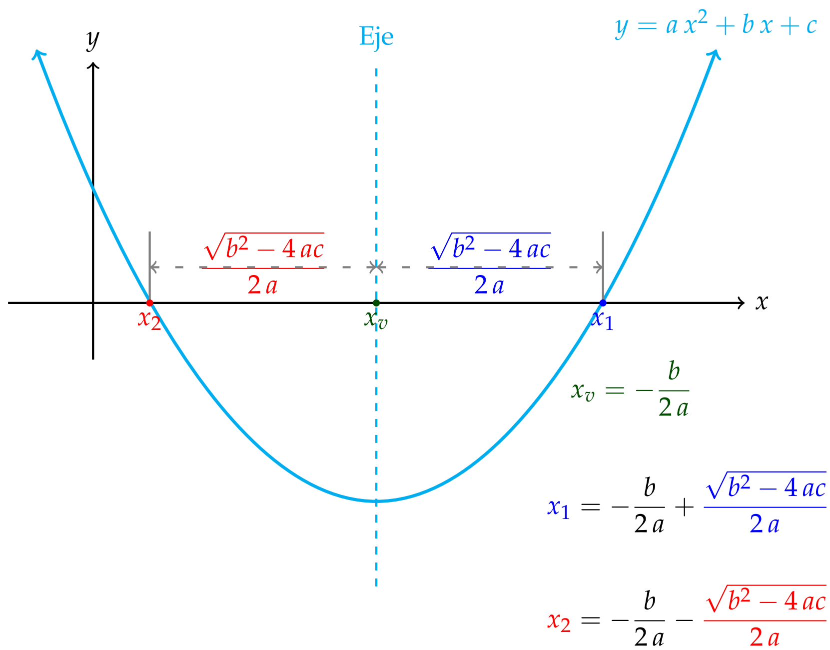
Observando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

vemos que si la función tiene dos raíces reales, éstas están a la misma distancia del eje de la parábola.

Esto nos sugiere una forma sencilla de calcular el vértice de la parábola, es decir, el mínimo o máximo de la función cuadrática.

Si el discriminante $D = b^2 - 4\,ac = 0$ la distancia del eje a cada raíz es cero, es decir, las dos raíces son iguales y están sobre el eje, y el valor ambas es: $x_v = -b/(2\,a)$.




Esta es una fórmula que nos permitirá calcular muy fácilmente el máximo o mínimo de una función cuadrática.

**Ejemplo 5**

Grafica la función:

$$y = -x^2 + 2\,x$$

Y calcula las coordenadas de su vértice.

- Primero calculamos las raíces de esta función.
- Para esto, utilizaremos el método de factorización:

$$\begin{array}{rcl} -x^2 + 2\,x = 0 & \Rightarrow & -x(x-2) = 0 \qquad \Rightarrow \\ x & = & 0 \\ x & = & 2 \end{array}$$

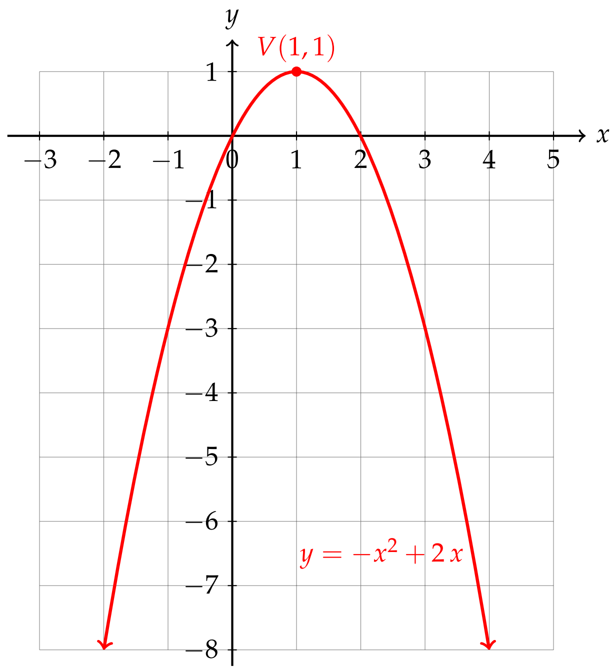
- También podemos calcular dónde está el vértice.
- Primero observa que el punto que está exactamente en medio de $x = 0$ y $x = 2$ es $x = 1$.
- Ahora verificamos aplicando la fórmula:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

- Para saber el valor de $y$ cuando $x = 1$ sustituimos en la función:

$$y(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

- Entonces, el vértice de la parábola está en el punto $V(1,1)$.
- Como el coeficiente principal es negativo, la parábola abre hacia abajo y tiene un máximo:




- ¿Cuál es el contradominio de esta función? $[1, -\infty)$

---

Observa que el vértice de la parábola corresponde a un máximo cuando el coeficiente principal de la función es negativo, es decir cuando $a_2 < 0$, porque entonces la parábola abre hacia abajo.

Por otra parte, la función tendrá un mínimo cuando $a_2$ sea positivo, porque entonces la parábola abrirá hacia arriba.

Comparando las dos formas de la función cuadrática:

$$\begin{aligned} y &= a\,x^2 + b\,x + c \\ y &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

y recordando que el vértice de la parábola está en

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{a_1}{2\,a_2}$$

vemos que el vértice de la función cuadrática está en el punto:

$$V\left(-\frac{a_1}{2\,a_2}, f\left(-\frac{a_1}{2\,a_2}\right)\right)$$

**Ejemplo 6** Encuentra dos números tales que su suma sea 10 y su producto sea máximo.

- Si consideramos solamente números enteros, tenemos un número infinito de pares de números que suman 10.
- Por ejemplo, 12 y $-2$ son uno de esos pares.

- Si $x$ es uno de los dos números, el otro será $10 - x$, porque al sumarlos obtenemos 10:

$$x + (10 - x) = 10$$

**Profesor:** La solución no tiene por qué incluir solamente números enteros.

- El problema exige que el producto de los dos números sea máximo.
- Para esto, vamos a definir la función:

$$y = x\,(10 - x) = 10\,x - x^2$$

- Ahora el problema se convierte en encontrar el vértice de esta función cuadrática.
- El valor de $x$ que hace que $y = x\,(10 - x) = 10\,x - x^2$ sea máximo está en el vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$$

**Profesor:** Sugiera a los estudiantes que calculen el producto de pares de números enteros que sumen diez.

- Si $x = 5$, entonces, $10 - x$ también vale 5.
- Así que los dos números que sumados dan 10 y dan producto máximo son 5 y 5.
- Se te queda como ejercicio calcular las dos raíces de esta función y graficarla.

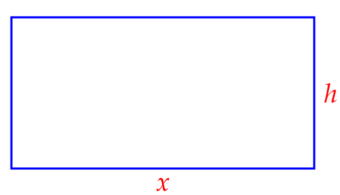
---

Este procedimiento servirá para resolver problemas prácticos.

**Ejemplo 7**

Don Gabriel debe cercar un terreno con los 40 metros de cerca que tiene para encerrar los becerros. Él desea crear el rectángulo que tenga mayor superficie. ¿Qué dimensiones debe tener el corral?

- Sabemos que Don Gabriel va a utilizar toda la cerca con la que cuenta, porque quiere formar el corral con la mayor área posible.
- Entonces, el perímetro del corral será de 40 metros.
- Vamos a hacer un dibujo para representar la situación:




- Como el perímetro del corral es de 40 metros,

$$2\,x + 2\,h = 40$$

- Podemos dividir ambos lados de la ecuación entre 2 y así obtenemos:

$$x + h = 20$$

- El problema puede resolverse ahora como el anterior: encontrar dos números que sumados den 20 y que al multiplicarlos obtengamos el producto máximo.

- Observa que el área del corral se calcula con el producto $x \cdot h$ (porque Área = base $\times$ altura), y que $h = 20 - x$.
- Entonces, la función cuadrática que nos ayudará a resolver este problema puede definirse como:
$$y = x \cdot h = x \cdot (20 - x) = 20\,x - x^2$$
- Como el coeficiente principal de la función es negativo, la función cuadrática tiene por gráfica una parábola que abre hacia abajo, y por tanto, el problema tiene un máximo.
- El vértice de esta función está en el punto:
$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{20}{2\,(-1)} = 10$$
- Ahora podemos calcular: $h = 20 - x = 20 - 10 = 10$.
- Entonces, se trata de un corral de forma cuadrada de 10 metros de lado.
- El perímetro es, evidentemente $(4)(10) = 40$ metros.
- El área de este terreno es de $(10)(10) = 100$ metros cuadrados.

**Profesor:** Sugiera a los estudiantes que sustituyan valores diferentes al encontrado y calculen el área del terreno para verificar que se trata de un máximo.

---

**Ejemplo 8** Un topógrafo sabe que el largo de un terreno es un metro mayor a su ancho. Si el área del terreno es de 600 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

- Si $x$ es el ancho del terreno, su largo, que es un metro mayor, es $x + 1$.
- El área del terreno es igual al producto de la base por la altura.
- Si $y$ es el área del terreno, entonces:
$$y = x\,(x + 1) = x^2 + x$$
- Para calcular las dimensiones del terreno debemos igualar a 600 su área.
- Entonces, debemos resolver:
$$600 = x^2 + x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + x - 600 = 0$$
- Ahora aplicamos la fórmula general para obtener:
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \\ &= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4\,(1)(-600)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2400)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{2} \end{aligned}$$

- Pero $\sqrt{2401} = 49$, entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+49}{2} = \frac{48}{2} = 24 \\ x_2 &= \frac{-1-49}{2} = -\frac{50}{2} = -25 \end{aligned}$$

- Evidentemente, el ancho no puede ser un número negativo.
- Así que el ancho del terreno es $x = 24$.
- El largo es: $x + 1 = 25$.
- Ahora se te queda como ejercicio graficar la función y ver cómo cambia el área del terreno cuando $x$ cambia de un valor a otro.

---

Un inversionista sabe que si alquila cuartos para estudiantes universitarios a \$1200.00 pesos la mensualidad, puede rentar 25 cuartos, pero si la mensualidad es de \$1 000 pesos, puede rentar 30 cuartos. ¿A qué precio debe alquilar los cuartos para obtener el mayor ingreso mensual?

**Ejemplo 9**

- Si definimos:

$$\begin{array}{ll} y \rightarrow & \text{el precio mensual del alquiler del cuarto} \\ x \rightarrow & \text{el número de cuartos alquilados a ese precio} \end{array}$$

  entonces, la ecuación[2] que indica cómo varía el número de cuartos alquilados conforme varía el precio es:

$$y = 2\,200 - 40\,x$$

- Nosotros queremos calcular el máximo ingreso.
- El ingreso que obtiene ese inversionista al alquilar $x$ cuartos es:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ingreso} & = & (\text{precio de cada cuarto}) & \cdot & (\text{número de cuartos alquilados}) \\ I & = & (2\,200 - 40\,x) & \cdot & x \end{array}$$

- Al realizar la multiplicación que queda indicada obtenemos:

$$I = 2\,200\,x - 40\,x^2$$

- Para encontrar el máximo aplicamos la fórmula para calcular $x_v$:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{2\,200}{(2)\cdot(-40)} = \frac{2\,200}{80} = 27.5$$

- Debe alquilar 27 cuartos para obtener el mayor ingreso posible.
- La renta mensual de cada cuarto es de:

$$y = 2\,200 - 40\,x = 2\,200 - 40\,(27) = 1\,120 \text{ pesos.}$$

**Profesor:** Con este cálculo termina la solución del problema.

[2]Puedes ver que esto es así en el último ejemplo que se resolvió en la sección anterior.

- El ingreso que obtendrá es:

$$I(27) = 2\,200\,x - 40\,x^2 = 2\,200\,(27) - 40\,(27)^2 = 30\,240 \text{ pesos.}$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta función cuadrática y calcular sus raíces.

---

# Créditos

| | |
|---|---|
| **Albert Einstein** | Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más. |

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

---

**Autor:** Efraín Soto Apolinar.

**Edición:** Efraín Soto Apolinar.

**Composición tipográfica:** Efraín Soto Apolinar.

**Diseño de figuras:** Efraín Soto Apolinar.

**Productor general:** Efraín Soto Apolinar.

**Año de edición:** 2010

**Año de publicación:** Pendiente.

**Última revisión:** 07 de agosto de 2010.



Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.
Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

*efrain@aprendematematicas.org.mx*