5. ECUACIONES Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

Hemos analizado hasta el momento las ecuaciones lineales y funciones lineales. Es momento de empezar a introducirnos en las ecuaciones de grado superior. Las ecuaciones de segundo grado merecen estudiarse aparte; es por ello que en la primera sección veremos y resolveremos ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas, y en la siguiente sección abordaremos el tema desde el punto de vista funcional.

En principio resolveremos las ecuaciones de segundo grado en forma algebraica, distinguiremos raíces y soluciones, analizaremos el discriminante para terminar con el procedimiento de completar cuadrados. Todo esto nos permitirá luego reconocer todos los aspectos geométricos de la gráfica de una función cuadrática, y nos posibilitará resolver situaciones problemáticas. Es así como podremos identificar el vértice, el eje de simetría y las raíces de una parábola, y sólo viendo la función cuadrática podremos tener una idea aproximada de su gráfica.

Comenzamos con la siguiente situación:

Dido: la fundadora de Cartago.

Cuenta la historia que cuando Dido, perseguida por su cruel hermano, asentó sus pies en lo que luego sería Cartago, negoció con el rey del lugar, Iarbas, la compra del terreno necesario para fundar una factoría. Iarbas aceptó en un precio ridículamente bajo pues el trato consistía en que debía entregar la tierra abarcada por la piel de 3 bueyes. Cerrado el trato, la astuta Dido cortó en finas tiras dicha piel logrando entonces abarcar mucho más de lo que Iarbas había pensado entregar. Además la belleza de Dido ayudó a que Iarbas se dejase engañar.

Si el trato hubiera sido que la parcela tenía que ser rectangular, ¿que rectángulo hubiese convenido a Dido construir?

Fijemos un perímetro y empecemos a conjeturar sobre los diferentes rectángulos. Supongamos que el perímetro es 24 y designemos con b y h las medidas de la base y la altura del rectángulo, entonces tenemos:

b	h	$Per = 24$	bh
1	11	2.1 +2.11	11
2	10	2.2 +2.10	20
3	9	2.3+2.9	27
4	8	2.4+2.8	32
5	7	2.5+2.7	35
6	6	2.6+2.6	36
7	5	2.7+2.5	35
8	4	2.8+2.4	32
9	3	2.9+2.3	27
10	2	2.10+2.2	20
11	1	2.11+2.1	11
12	*no tiene solución*		

Observamos que en este caso, de perímetro 24, el rectángulo de área máxima se obtiene para b = h, es decir para el cuadrado. Es decir que a Dido le hubiese convenido construir un cuadrado.

En la resolución de este ejemplo hay ecuaciones de segundo grado que es lo que abordaremos a lo largo de la unidad.

5.1. ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Comenzamos con la definición de ecuación de segundo grado.

Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, es una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Más ejemplos:

$$3y - y^2 = 0$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

Son ejemplos de ecuaciones de ***segundo grado***

$$x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

pues el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita es dos.

Ejemplos:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

- 3 x2 - 6 x + 12 = 0

$$3x - x^2 = 0$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$4x^2 = 0$$

La ecuación puede ser **completa** :

$$\boldsymbol{a x^2 + b x + c = 0}$$

con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

o puede ser **incompleta:**

- $b \neq 0$, $c = 0$ *del tipo* $a x^2 + b x = 0$
- $b = 0$, $c \neq 0$ *del tipo* $a x^2 + c = 0$
- $b = 0$, $c = 0$ *del tipo* $a x^2 = 0$

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita, tiene dos raíces que denotaremos x_1 y x_2.

Soluciones o raíces

Las *soluciones* o *raíces* x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado de la forma $a x^2 + b x + c = 0$ con $a \neq 0$ pueden obtenerse a través de la conocida fórmula de Bhaskara reemplazando los coeficientes a , b , c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos escribir en forma abreviada:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante

La expresión del radicando

$$b^2 - 4ac$$

se llama *discriminante* de la ecuación y se simboliza con la letra griega D.

A modo de ***ejemplificación***, resolveremos las siguientes ecuaciones:

Observemos que...

las raíces son números reales y distintos.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

luego $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$.

Observemos que...

las raíces son números complejos conjugados.

b) $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

luego $x_1 = 1 + 2i$ y $x_2 = 1 - 2i$

Observemos que...

las raíces son números reales e iguales (raíz doble).

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

luego $x_1 = -3$, $x_2 = -3$

De los ejemplos anteriores resulta que, según el signo del discriminante Δ, tenemos:

Observemos que...

en el ejemplo $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenemos $\Delta=1$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos **raíces reales y distintas.**

Observemos que...

en el ejemplo $x^2 - 2x + 5 = 0$ tenemos $\Delta = -16$.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos **raíces complejas conjugadas**.

Observemos que...

en el ejemplo $9\,x^2 + 6\,x + 1 = 0$ tenemos $\Delta = 0$.

- Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una ***raíz doble***.

Hasta aquí, hemos visto la forma de resolver las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, obteniendo las soluciones o raíces de la ecuación. Ahora veremos la siguiente situación: si conocemos las raíces de una ecuación de segundo grado, ¿cómo obtenemos la ecuación de segundo grado de la cuál son raíces? El objetivo es reconstruir la ecuación conocidas las raíces.

Si las raíces de una ecuación cuadrática son x_1 y x_2, la ecuación puede factorizarse así:

$$a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2) = 0$$

Ejemplo:

Observemos que...

$a = 4$

y

$x_1 = x_2 = 1/2$

$$4x^2 - 4x + 1$$

Si extraemos 4 factor común tenemos

$$4(x^2 - x + ¼)$$

se tiene que $x = ½$ es raíz doble de la ecuación, es decir, se puede escribir

$$4\,(x-1/2\,)^2 \quad ó \quad 4(x-1/2\,)\,(x-1/2).$$

A continuación daremos otra forma de resolución para las ecuaciones de segundo grado completas. A este procedimiento se lo llama **completar cuadrados**. Este método resultará importante en la siguiente sección para identificar los elementos que caracterizan a la función cuadrática.

Retomaremos los ejemplos dados anteriormente con el fin de analizarlos.

Observemos que...

podemos escribir la ecuación como

$(2\,x)^2 - 2\,.\,2\,x + 1^2 = 0$

a) $4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$

El primer miembro de la igualdad es el desarrollo del cuadrado de binomio $(2\,x - 1)^2$; luego resulta

$$(2\,x - 1)^2 = 0$$

Entonces $(2\,x - 1)\,(2\,x - 1) = 0$ y

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Observemos que...

el primer miembro de la igualdad no corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio. Pues si bien 16 es 4^2, el coeficiente de x debería ser el doble de 4, es decir 8 y no lo es.

b) $x^2 - 6\,x - 16 = 0$

Al procedimiento que aplicaremos para este caso se lo llama ***completar cuadrados***.

El coeficiente de x es 6, que lo podemos escribir como 2.3, es decir el doble de 3. Ahora sumamos y restamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, esto es el cuadrado de 3.	$x^2 - 6x - 16 + 9 - 9 = 0$
Asociando convenientemente	$(x^2 - 6x + 9) - 16 - 9 = 0$
El paréntesis corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio	$(x^2 - 6x + 9) - 25 = 0$ $(x - 3)^2 - 25 = 0$ $(x - 3)^2 = 25$
de donde resultan las soluciones	$x - 3 = 5$ es decir $x_1 = 8$ $x - 3 = -5$; $x_2 = -2$.
Otro modo de resolver $(x - 3)^2 = 25$ es por medio de la definición de valor absoluto.	$\lvert x - 3 \rvert = \sqrt{25}$, $x - 3 = 5$; $x_1 = 8$ $x - 3 = -5$; $x_2 = -2$.

c) $-3x^2 - 6x + 12 = 0$

Como el coeficiente de x^2 no es 1 extraemos (-3) factor común.	$(-3) \cdot (x^2 + 2x - 4) = 0$
Luego para que la igualdad se cumpla, debe ser:	$x^2 + 2x - 4 = 0$
Completando cuadrados se obtiene	$(x + 1)^2 = 5$
Luego, las soluciones son	$x_1 = -1 - \sqrt{5}$ y $x_2 = -1 + \sqrt{5}$.

Las ***ecuaciones incompletas*** también pueden resolverse directamente como mostramos a continuación:

Ejemplo:

En este caso $b = c = 0$ entonces las soluciones siempre son $x_1 = x_2 = 0$.	a) $4x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

En este caso
$b = 0$ y $c \neq 0$,
y no hace falta utilizar
la fórmula de Baskhara.

b) $3x^2 - 48 = 0$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4, \; x_2 = -4$$

En este caso,
x es factor común y, por tanto,
una raíz es cero.

c) $3x - x^2 = 0$

$$x\,(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \;;$$

$$3 - x = 0; \quad x_2 = 3$$

Observemos que...

si la ecuación es cuadrática,
pero no tiene la forma
$a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
se resuelven todas las
operaciones indicadas para
reducirla a esa forma.

Ahora queremos resolver la ecuación

$$-x^2 - x = 5 - \frac{x+1}{2}$$

$$-x^2 - x = \frac{10 - (x+1)}{2}$$

$$2\,(-x^2 - x) = 10 - (x + 1)$$

$$-2x^2 - 2x = 10 - x - 1$$

$$-2x^2 - 2x - 10 + x + 1 = 0$$

$$-2x^2 - x - 9 = 0$$

$$2x^2 + x + 9 = 0$$

Aplicando la fórmula ya vista,
resulta:

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{71}}{4}i \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{71}}{4}i$$

Ahora resolveremos algunos problemas cuyas soluciones involucran ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4c$

$\Delta = 144 - 4c$.

Dada la ecuación

$$x^2 - 12x + c = 0,$$

queremos hallar los valores de c para que las dos raíces de la ecuación sean reales y distintas.

El valor del discriminante en este caso es $\Delta = 144 - 4c$.

Para que las dos raíces sean reales y distintas, debe ocurrir que el discriminante sea mayor que cero. Luego

$$144 - 4c > 0, \text{ es decir } c > 36.$$

De este modo, $x^2 - 12x + 39$ es un ejemplo del tipo de ecuación que se pide.

Ejemplo:

Resolvemos la ecuación
$x^2 + 4x - 60 = 0$.
Obtenemos que las raíces son

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2}$$

Así, $x_1 = 6$ y $x_2 = -10$.

La suma del área de un cuadrado más su perímetro es 60. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?.

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado, su área es x^2 y su perímetro es $4x$. La suma del área del cuadrado más su perímetro es 60, es decir,

$$x^2 + 4x = 60.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -10$.

Verificación:

$6^2 + 4.6 = 60;$

$(-10)^2 + 4.(-1) = 60.$

Ambas soluciones verifican la ecuación, pero únicamente $x_1 = 6$ es solución pues la longitud no puede ser negativa.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 = 0$
b) $x^2 - x = 0$
c) $4x^2 - 9 = 0$
d) $x^2 + 11 = 0$
e) $8x^2 + 16x = 0$
f) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$
g) $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0$
h) $-x^2 + 4x - 7 = 0$
i) $(x + 1)^2 = 9$
j) $\dfrac{x^2 - 3x}{2} - 5 = \dfrac{x - 20}{4}$
k) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

Ejercicios complementarios

l) $x^2 - 9 = 0$
m) $x^2 - 5x + 6$
n) $(3x + 2)(3x - 2) = 77$
o) $x^2 - 2x + 6 = 0$
p) $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(x + 1) = 0$
q) $x^2 + 2x - 12 = 0$
r) $\dfrac{x^2 - 1}{6} = 4$
s) $5x^2 - 10x = 0$
t) $(x - 2)^2 = -4x + 2x^2$
u) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

A continuación se propone resolver problemas en los cuales están involucradas ecuaciones de segundo grado. Recuerda los pasos indicados para la resolución de los mismos vistos en la unidad 2.

2) Dada la ecuación $x^2 - (m + 2)\,x + 10 = 0$ hallar los valores de m para que las dos raíces sean iguales.

3) La suma de un número positivo y su cuadrado es 42. Hallar dicho número.

4) Hallar dos números consecutivos cuyo producto es 380.

5) El producto de un número negativo por su tercera parte es 27. Calcular dicho número.

6) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. Hallar dichos números.

7) Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

8) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm., tres números pares consecutivos. Hallar los valores de dichos lados.

9) Dentro de 11 años la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcular la edad de Marcela.

10) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de ancho uniforme. Hallar el ancho de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

11) En cada una de las esquinas de una plancha de cartón de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 cm de lado y doblando y pegando, se forma una caja de 1280 cm^3. Hallar el lado de la hoja inicial.

12) El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 m y la hipotenusa 1m más que el otro cateto. Hallar los lados del triángulo.

13) Un poste de luz de 7 metros se rompe a una cierta altura del suelo y al doblarse, la punta libre del trozo roto cae a 3 m de la base del poste. ¿A qué altura se rompió?.

5.2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Función Cuadrática

A toda función de la forma

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad , \text{ con } \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad y \quad a \neq 0$$

se la llama *función cuadrática*.

Ejemplo:

$4x^2 - 2x + 5$

$4x^2$ es el término cuadrático,
$-2x$ es el término lineal, y
5 es el término independiente.

En la expresión anterior

a x^2 es el ***término cuadrático***,

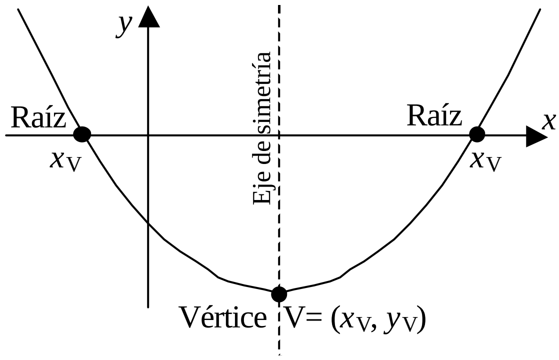
b x es el ***término lineal***, y

c el ***término independiente***.

El dominio de la función es R y su gráfica es una curva llamada ***parábola***.

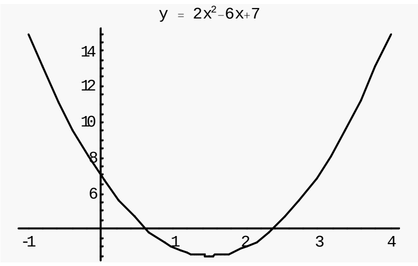
Cada uno de los lugares en los que la gráfica corta el eje x se conoce como **raíz**.
El **vértice** es el punto en el cual la gráfica alcanza su valor mínimo (o máximo).
El **eje de simetría** es una recta que permite observar claramente que las parábolas son curvas simétricas.

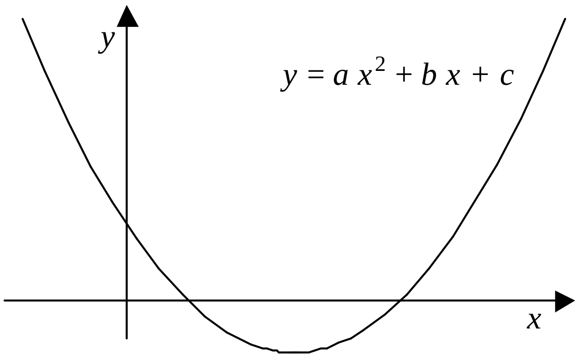
En su gráfica identificamos los siguientes elementos:



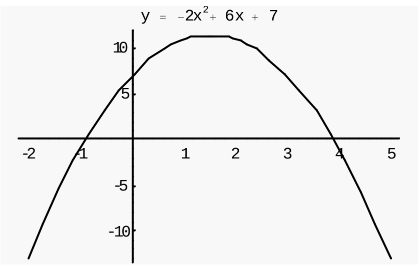
A continuación analizaremos los gráficos de algunas funciones cuadráticas cuando varía el coeficiente de x^2.

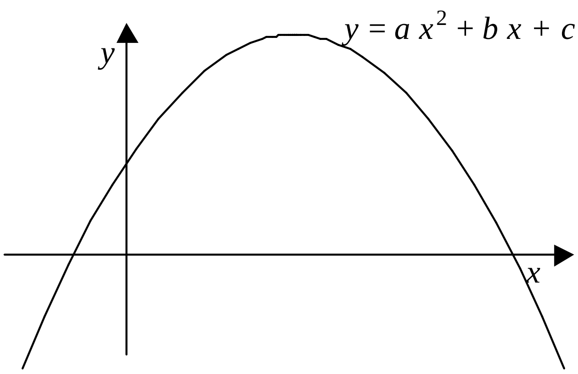
En principio, si a > 0 la gráfica es de la forma:





en cambio, si a < 0 la gráfica es de la forma:





Así, dada la función $y = a\ x^2 + b\ x + c$, el signo de a indica hacia donde se dirigen las ramas de la parábola:

- si a es positivo, las ramas van hacia arriba,
- si a es negativo, las ramas van hacia abajo.

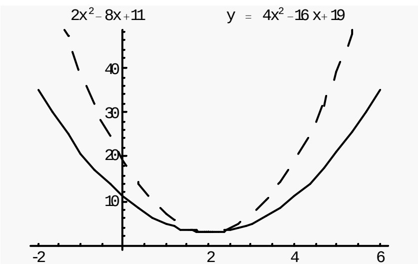
Por otro lado, si comparamos ahora la gráfica de

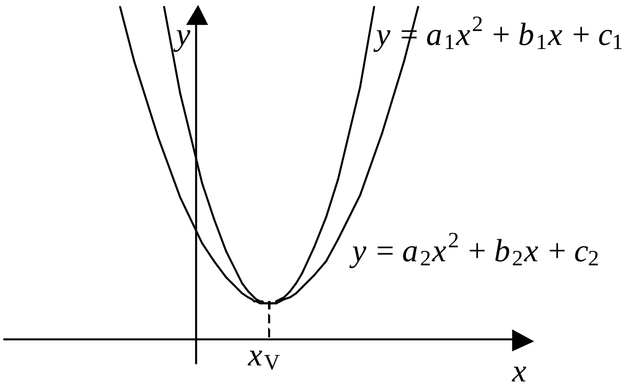
$$y = a_1\ x^2 + b_1\ x + c_1$$

con la gráfica de

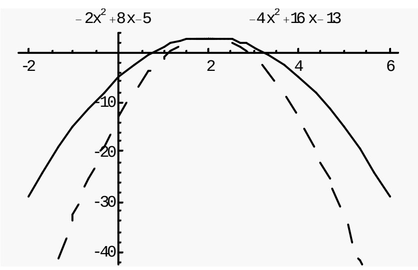
$$y = a_2\ x^2 + b_2\ x + c_2$$

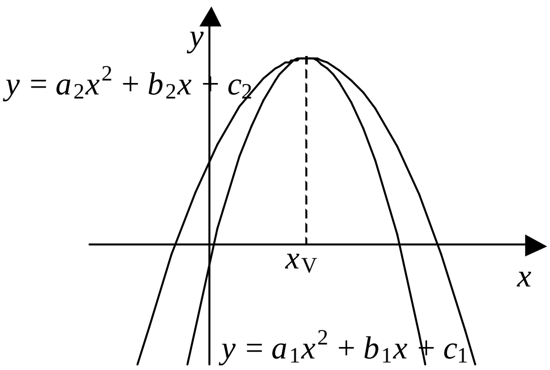
en aquellos casos en que a_1 y a_2 tienen el mismo signo y el vértice de ambas parábolas coincide, resulta uno de los siguientes casos:





si $a_1 > a_2 > 0$





si $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, y $|a_1| > |a_2|$.

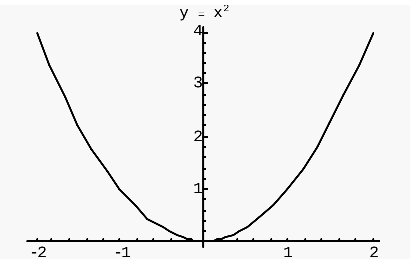
Así, el valor absoluto de a modifica la abertura de las parábolas:

- cuanto menor es $|a|$, la parábola es más abierta,
- cuanto mayor es $|a|$, la parábola es más cerrada.

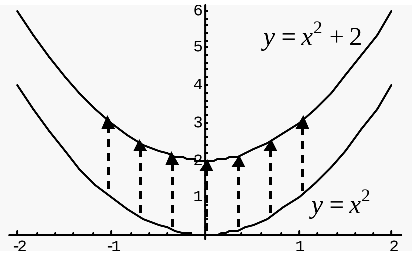
Para continuar investigando la gráfica de una parábola, centraremos nuestra atención ahora en la función

$$y = x^2$$

cuya gráfica es simétrica respecto del eje y.

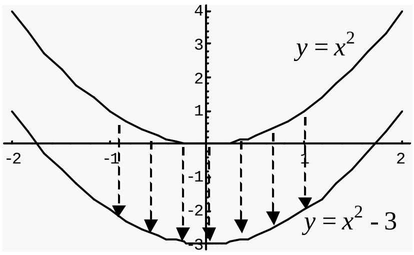


Veamos que si desplazamos su gráfico en forma vertical u horizontal, obtenemos las gráficas de otras funciones cuadráticas.
Comenzaremos analizando lo que sucede al trasladarla verticalmente.



Ejemplo:

- Si trasladamos la gráfica $y = x^2$ dos unidades hacia arriba, obtenemos la gráfica de la función $y = x^2 + 2$.



- Si trasladamos la gráfica $y = x^2$ tres unidades hacia abajo, obtenemos la gráfica de la función $y = x^2 - 3$.

Observemos que...

estos desplazamientos no modifican el eje de simetría,
pero sí la ordenada del vértice y el conjunto imagen de cada función.

Recuerda que...

- ✓ el vértice es el punto en el cual la parábola alcanza su valor máximo o mínimo;
- ✓ el conjunto imagen está formado por las coordenadas en y de cada uno de los puntos pertenecientes a la parábola.

Para pensar….

¿Cómo completarías el siguiente cuadro?

	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = x^2 - 1.$
Vértice		(0 , 2)	
Conjunto imagen			$[-1 , +\infty)$

Concluimos entonces que en caso de contar con una parábola cuya ecuación es de la forma

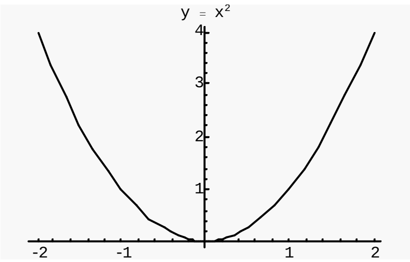
$$y = x^2 + k,$$

las coordenadas del vértice son

$$(0, k)$$

mientras que el conjunto imagen es

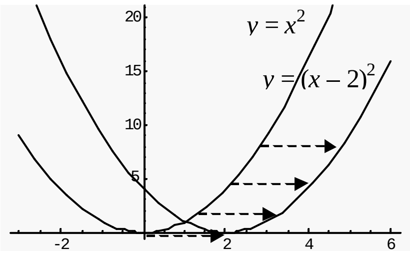
$$[k, +\infty).$$



Continuando con nuestro análisis de la gráfica de la función

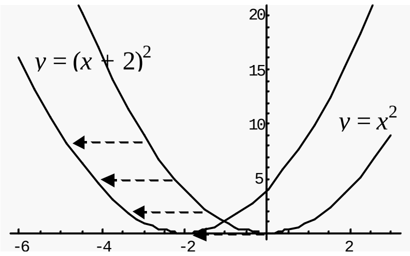
$$y = x^2$$

veamos qué sucede ahora si desplazamos su gráfico en forma horizontal.



Ejemplo:

- Si trasladamos la gráfica $y = x^2$ dos unidades hacia la derecha, obtenemos la gráfica de la función $y = (x - 2)^2$.



- Si trasladamos la gráfica $y = x^2$ dos unidades hacia la izquierda, obtenemos la gráfica de la función $y = (x + 2)^2$.

Observemos que ...

estos desplazamientos modifican el eje de simetría y la abscisa del vértice, pero no su ordenada ni el conjunto imagen de cada función.

Para pensar….

Puede que te ayude
el gráfico de las funciones.

¿Cómo completarías el siguiente cuadro?

	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2$	$y = (x + 1)^2$
Eje de simetría			$x = -1$
Vértice		$(2 , 0)$	

Concluimos entonces que en caso de contar con una parábola cuya ecuación es de la forma

$$y = (x - p)^2$$

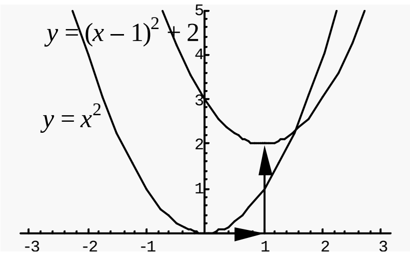
las coordenadas del vértice son

$$(p, 0)$$

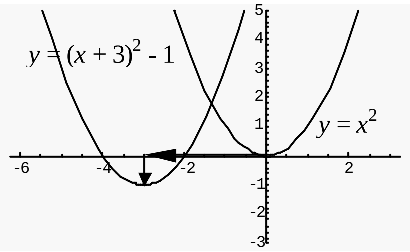
mientras que el eje de simetría es

$$x = p.$$

Combinando lo visto hasta ahora, podemos observar que:



- ✓ si trasladamos la gráfica $y = x^2$ una unidad hacia la derecha, y dos unidades hacia arriba, obtenemos la gráfica de la función $y = (x - 1)^2 + 2$.



- ✓ si, trasladamos $y = x^2$ tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia abajo, obtenemos la gráfica de la función $y = (x + 3)^2 - 1$.

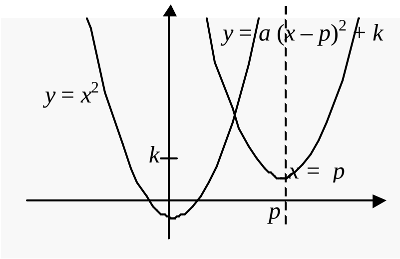
Para pensar….

- ✓ Representa en un mismo sistema coordenado las gráficas de: $y = x^2$; $y = (x - 1)^2 + 2$ e $y = (x + 3)^2 - 1$.

- ✓ ¿Cómo completarías el siguiente cuadro?

	$y = x^2$	$y = (x - 1)^2 + 2$	$y = (x + 3)^2 - 1$
Eje de simetría			$x = -3$
Vértice		(1 , 2)	
Conjunto imagen			

Recuerda efectuar los gráficos partiendo de la función $y = x^2$.



En síntesis, al desplazar la gráfica de

$$y = x^2$$

p **unidades en sentido horizontal y *k* unidades en sentido vertical, obtenemos la gráfica de la función**

$$y = (x - p)^2 + k$$

Su vértice es el punto

$$V = (p\ ,\ k)$$

El eje de simetría es la recta de ecuación

$$x = p.$$

Forma Canónica

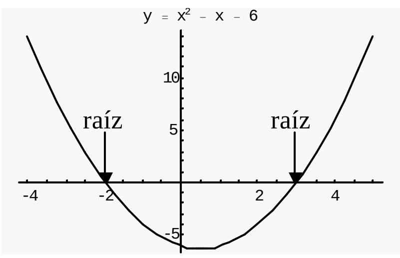
Ahora bien, ¿cómo podemos expresar la función cuadrática

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \ ,\ \text{con}\ \ a \neq 0\ ,$$

en la forma

$$y = a\,(x - p)^2 + k\ ?$$

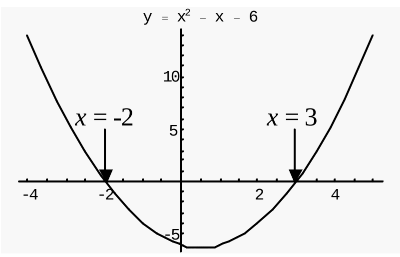
Precisamente mediante el método de completar cuadrados. A la forma $y = a\,(x - p)^2 + k$ se la conoce como ***forma canónica*** de la parábola.



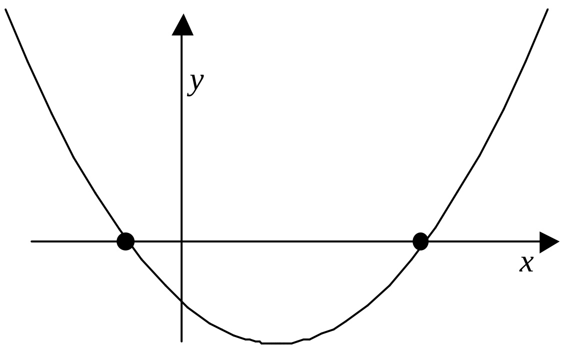
Cuando $y = 0$, resulta la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ cuyas raíces se obtienen como ya hemos visto aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

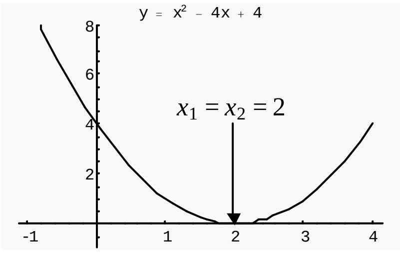
Las mismas representan los puntos de intersección de la parábola con el eje x.

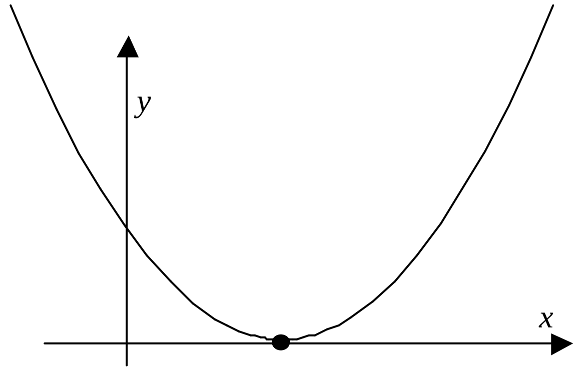


Según que la ecuación tenga dos raíces reales, una o ninguna, la parábola cortará al eje x, será tangente a él, o quedará toda ella por encima o por debajo del eje:

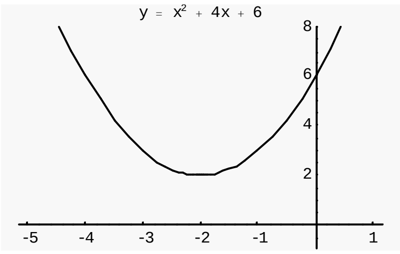


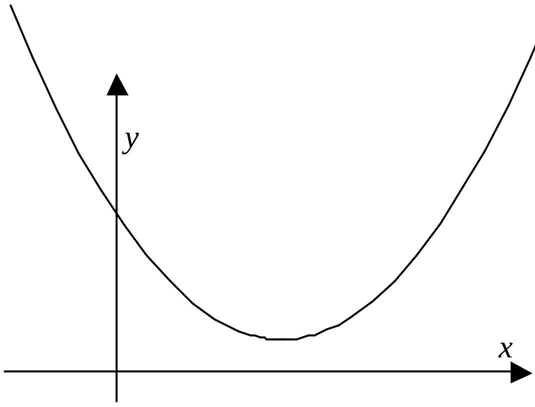
dos raíces reales





una raíz real doble





ninguna raíz real

Observemos que ...

cuando la parábola tiene raíces reales, las mismas equidistan del eje de simetría.

Luego podemos obtener la abscisa del vértice de la parábola haciendo:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

y la ordenada de dicho vértice, y_V reemplazando x_V en la ecuación de la función cuadrática.
Otra forma de obtener la abscisa del vértice es aprovechar el hecho de que si en la fórmula $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$ reemplazamos x_1 y x_2 por las expresiones de la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, obtenemos

$$x_V = \frac{-b}{2a}.$$

Al aplicar $x_V = \frac{-b}{2a}$, podemos obtener x_V , sin importar el tipo de raíces.

Comprueba efectuando la gráfica correspondiente.

Ejemplo:

La función $y = - x^2 - 2\,x - 3$, no tiene raíces reales.
Las coordenadas del vértice son :

$$x_V = \frac{-b}{2\,a} = \frac{-(-2)}{2\,(-1)} = -1 \quad \text{e} \quad y_V = -(-1)^2 - 2\,(-1) - 3 = -2.$$

Si no recuerdas el *método de completar cuadrados* es conveniente que estudies nuevamente este tema contenido en la unidad anterior.

Para pensar….

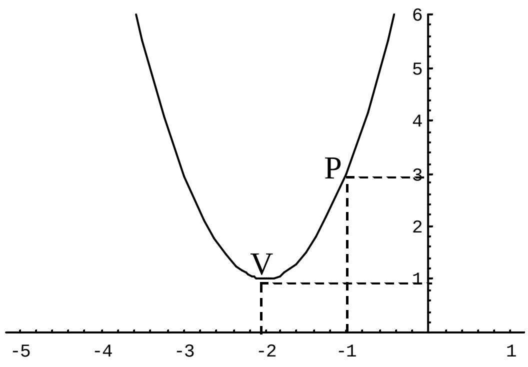
Considera la función $y = 3x^2 - 2\,x - 1$. Completando cuadrados resulta $y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$.

Grafica la función y responde:

- ✓ ¿ Hacia dónde está abierta la parábola ?
- ✓ ¿ Cuáles son las coordenadas del vértice ?
- ✓ ¿ Cuál es el eje de simetría ?
- ✓ ¿ Cuáles son los puntos de intersección de la parábola con los ejes x e y ?

Ejemplo:

Hallaremos la expresión de la función cuadrática graficada.



- reemplazamos las coordenadas del vértice en la forma canónica $y = a\,[x - (-2)]^2 + 1$
- Reemplazamos x e y por las coordenadas del punto P: $3 = a\,(-1 + 2)^2 + 1$
- Obtenemos: $a = 2$
- Sustituimos en la ecuación $y = a\,[x - (-2)]^2 + 1$ el valor de a y obtenemos la expresión de la función:

$$y = 2\,(x + 2)^2 + 1$$

Ejemplo: la función

$$y = -x^2 - 13x$$

puede expresarse como:

$$y = -x^2 - 13x = -x \cdot (x + 13)$$

Por último, una función cuadrática

$$y = a x^2 + b x + c$$

con raíces reales x_1 y x_2 puede ser expresada en la forma:

$$y = a (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

como lo vimos en la unidad anterior.

Resumiendo, podemos expresar la ecuación de una función cuadrática como muestra el siguiente cuadro:

Forma	**Expresión**	**Parámetros**
Polinómica o general	$y = a x^2 + b x + c \ , \ a \neq 0$	a, b , c (c: ordenada al origen)
Canónica	$y = a (x - x_V)^2 + y_V \ , \ a \neq 0$	a, x_V, y_V ($V = (x_V, y_V)$ vértice)
Factorizada	$y = a (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ , \ a \neq 0$	a, x_1, x_2 (x_1, x_2 : raíces)

Retomemos ahora el problema de la introducción de la unidad

Cuenta la historia que cuando Dido, perseguida por su cruel hermano, asentó sus pies en lo que luego sería Cartago, negoció con el rey del lugar, Iarbas, la compra del terreno necesario para fundar una factoría. Iarbas aceptó en un precio ridículamente bajo pues el trato consistía en que debía entregar la tierra abarcada por la piel de 3 bueyes. Cerrado el trato, la astuta Dido cortó en finas tiras dicha piel logrando entonces abarcar mucho más de lo que Iarbas había pensado entregar. Además la belleza de Dido ayudó a que Iarbas se dejase engañar.
Si el trato hubiera sido que la parcela tenía que ser rectangular, ¿ que rectángulo hubiese convenido a Dido construir?

En principio, consideremos el perímetro igual a 24, tal como analizamos al inicio de esta unidad. Designemos con b y h a las medidas de la base y la altura del rectángulo, respectivamente.
Como el perímetro es 24, resulta

$$24 = 2 (b + h).$$

De aquí, despejando b tenemos

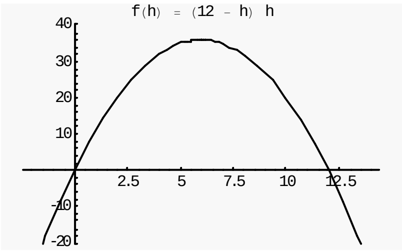
$$b = 12 - h.$$

Por otro lado, el área del rectángulo, a la que simbolizaremos con A, resulta ser

$$A = b\ h,$$

y reemplazando en esta ecuación el valor de b con el obtenido en el paso anterior tenemos

$$A = (12 - h)\ h.$$



$$f(h) = (12 - h)\,h$$
$$f(h) = -h^2 + 12h$$
$$f(h) = -(h - 6)^2 + 36$$

El miembro derecho de esta ecuación es una función de segundo grado

$$f(h) = (12 - h)\,h.$$

Si observamos la gráfica de esta función, es claro que alcanza su valor máximo cuando h es la coordenada del vértice de la misma.
Como el vértice de esta parábola tiene las coordenadas

$$(6, 36)$$

resulta que el valor de h que hace que el área del rectángulo en cuestión sea máxima es

$$h = 6.$$

Retornando a la ecuación anterior, con este valor obtenemos

$$b = 12 - h = 12 - 6 = 6$$

lo que corrobora que efectivamente a Dido le hubiese convenido construir un cuadrado.

Para pensar….

Plantea la situación anterior considerando un perímetro P cualquiera.

✓ ¿Serías capaz de probar que cualquiera sea el perímetro fijado siempre lo conveniente es construir un cuadrado?.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

14) Representar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de: $y = 2\,x^2$; $y = \frac{1}{2}\,x^2$;

$y = -2\,x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$.

15) Sea la función $y = x^2$:

a) Calcular $f(-4)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\sqrt{7}\right)$.

b) Indicar, si es posible los valores de x para los cuales: $f(x) = 100$; $f(x) = 5$; $f(x) = -4$; $f(x) = f(5)$.

16)

1) Indicar cuál fue el desplazamiento aplicado a la función $y = x^2$ para obtener cada una de las siguientes expresiones:

a) $y = (x - 5)^2$ b) $y = (x + 4)^2 - \frac{7}{2}$ c) $y = x^2 + 2{,}5$

2) Graficar las funciones del inciso anterior, señalando en cada gráfico el vértice y el eje de

simetría; expresar cada fórmula en forma polinómica.

17) Hallar la expresión polinómica de la función correspondiente al desplazamiento de $y = x^2$ según se indica en cada caso:

a) 3 unidades hacia arriba;
b) 2,5 unidades hacia la izquierda;
c) 1,5 unidades hacia abajo y 1 hacia la derecha.

18) Hallar, sin efectuar ningún cálculo, el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:

a) $y = (x - 2)^2 - 4$ b) $y = (x + 3)^2 + 2$ c) $y = 3x^2 + 5$

d) $y = 2(x - 2)^2$ e) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$

19) Escribir las ecuaciones de las parábolas que, teniendo la misma forma que $y = x^2$, tengan vértice en:

a) (2 , 3) b) (-5 , 4) c) (1 , - 5) d) (- 4 , - 6)

20) Determinar las raíces reales, las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría y el punto de intersección con el eje de las ordenadas para cada una de las siguientes funciones y luego graficarlas.

a) $y = x^2 - 2x - 8$ b) $y = -x^2 + 6x - 9$ c) $y = (2x - 1) . (x + 2,5)$
d) $y = -0,5(x + 1)^2 - 1,5$ e) $y = -x^2 - x - 2$ f) $y = (x - 2)^2 + 3$

21) Graficar las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = -x^2 + 4x$ c) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ e) $y = (x - 4)^2 + 3$ f) $y = -3(x - 2)^2 + 5$

g) $y = 2(x - 3)^2$ h) $y = -4(x + 1)^2 - 3$

22) Trazar en un mismo sistema de ejes de coordenadas cartesianas las gráficas de las siguientes funciones:

$y = x^2 + 3$ $y = 2x^2 + 3$ $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

¿En qué punto tienen el vértice?. ¿Cuál es el eje de simetría?

23)

1) Hallar la expresión de la función cuadrática que cumpla los requisitos pedidos en cada caso:

a) Su gráfico pasa por el punto (1 , -1) y su vértice es el punto V = (-2 , 3)

b) Su gráfico intersecta al eje y en (0 , 3) y su vértice es el punto V = (1 , 2)

c) Una de sus raíces es $x = 3$ y el vértice de su gráfico es V = $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

d) El vértice es V = (-2 , 1) y la ordenada al origen es 4.

2) Para cada una de las funciones del inciso anterior:

i) Hallar las raíces reales, si existen.

ii) Realizar el gráfico.

24) Calcular b para que la parábola $y = x^2 + \mathrm{b}\,x + 3$ tenga el vértice en el punto (2 , - 1).

25) Calcular la expresión de todas las funciones cuadráticas cuya intersección con el eje x son los puntos (2 , 0) y (3 , 0).

26) Se sabe que la función $y = \mathrm{a}\,x^2 + \mathrm{b}\,x + \mathrm{c}$ pasa por los puntos (1 , 1) ; (0 , 0) y (-1 , 1). Calcular a , b y c.

27) Calcular la ecuación de una parábola que pasa por los puntos A (1 , 4) ; B (0 , -1) y C (2 , 15).

28) Una parábola tiene su vértice en el punto V (1,1) y pasa por el punto (0,2). Hallar su ecuación.

29) Hallar los intervalos en que la función $y = x^2 - 6x + 8$ es positiva o negativa. ¿En qué puntos se anula?.

30) Hallar el número de puntos de corte con el eje x que tienen las siguientes parábolas:

a) $y = 2\,x^2 - x + 3$ b) $y = x^2 - 2\,x + 1$ c) $y = x^2 + x + 1$

d) $y = 3x^2 - 7\,x - 3$ e) $y = 2\,x^2 + 5\,x + 1$

31) Hallar los posibles valores de “m” para que se cumpla la condición pedida en cada caso:

a) $y = x^2 + \mathrm{m}\,x + 3$ tiene una raíz doble;

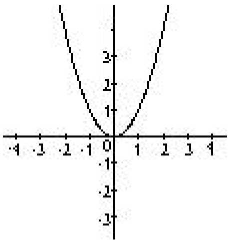
b) $y = 2\,x^2 - x - \mathrm{m}$ no tiene raíces reales;

c) el gráfico de las funciones de la forma $y = \mathrm{m}\,x^2 - x - 1$ intersecta el eje x en dos puntos;

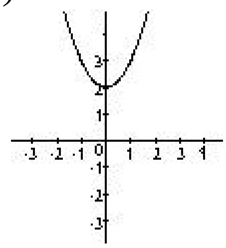
d) el gráfico de las funciones de la forma $y = -\,x^2 - \mathrm{m}\,x - 5$ toca al eje x, pero no lo atraviesa.

32) Dar la ecuación de las funciones cuadráticas graficadas a continuación:

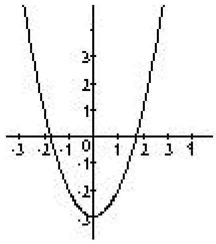
a)



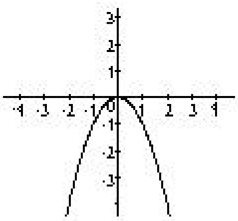
b)



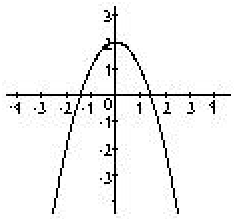
c)



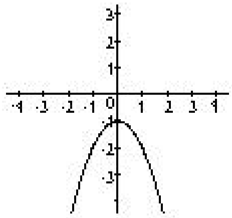
d)



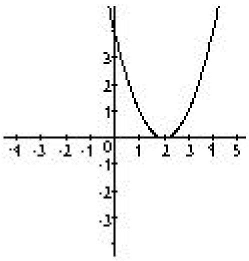
e)



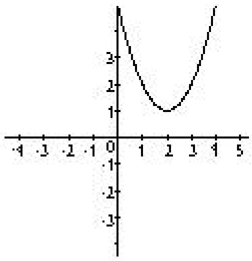
f)



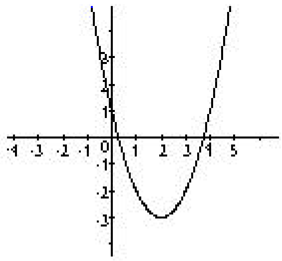
g)



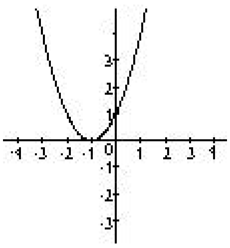
h)



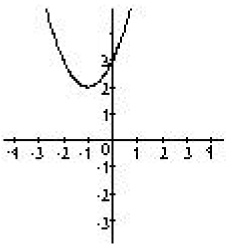
i)



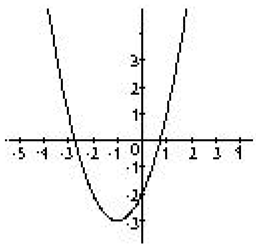
j)



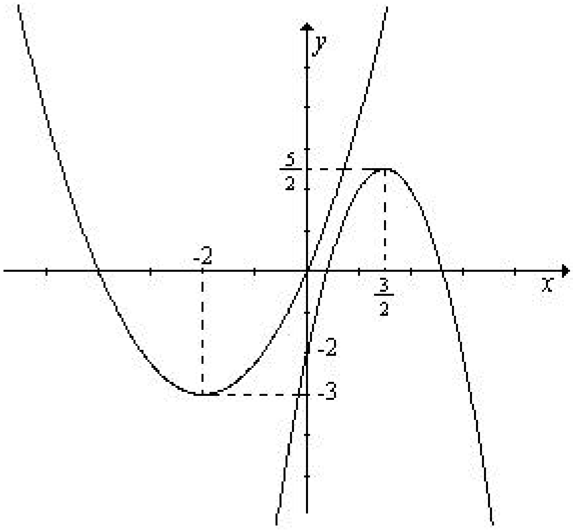
k)



l)

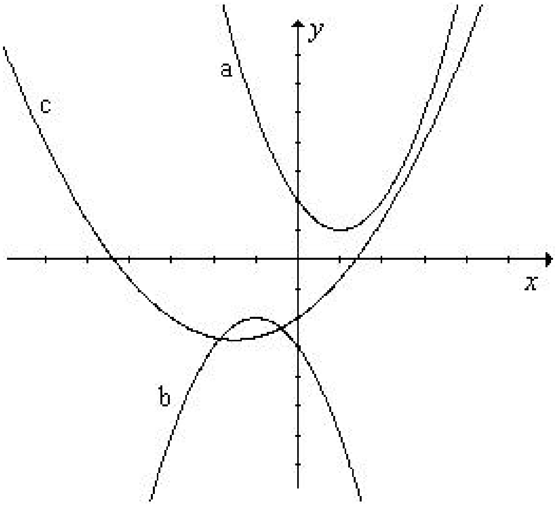


33) Para cada una de las funciones graficadas:



a) expresarlas en forma polinómica;
b) hallar sus raíces.

34) Asignar a cada una de las parábolas una de las ecuaciones siguientes:



i) $y = \dfrac{1}{3}\, x^2 + x - 2$

ii) $y = x^2 - 2\,x + 2$

iii) $y = -\, x^2 - 2\,x - 3$

35) Expresar en forma factorizada las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3\,x^2 - 6\,x$
b) $y = x^2 - 13\,x + 42$
c) $y = x^2 + 14\,x + 49$
d) $y = -\,x^2 + 2\,x$
e) $y = 6\,x^2 - 24$
f) $y = 2\,x^2 + 4\,x - 30$

36) Encontrar la forma canónica de las siguientes funciones. Graficar:

a) $y = x^2 - 4\,x + 4$
b) $y = -\,2\,x^2 - 4\,x - 2$
c) $y = x^2 + 4\,x + 2$
d) $y = x^2 - 6\,x$
e) $y = x^2 - 7\,x - 18$
f) $y = 3\,x^2 + 12\,x - 5$
g) $y = (2\,x - 3)^2 - 8\,x$
h) $y = 3\,x\,(x - 1) - 6$

37) ¿Es una parábola la gráfica de la función que expresa el área de los rectángulos que tienen un perímetro de 10 unidades?. ¿Por qué?.

38) Escribir la fórmula que da el área de un círculo en función del radio. ¿Qué tipo de función es? Graficar.

39) Se quieren construir cajas de base cuadrada y de altura 2cm.

i) ¿Cuál será el volumen cuando la medida del lado de la base es 1 dm?,

ii) ¿y si mide 2 dm?,

iii) ¿y si mide 3 cm?.

iv) Buscar la relación funcional que existe entre el lado de la base y el volumen de la caja.

40) Un diagramador está definiendo las dimensiones que tendrá una revista. Necesita que el largo sea 10cm mayor que el ancho y que la superficie de cada página resulte de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que cumplen ambas condiciones?.

41) Expresar el área del triángulo equilátero en función del lado. ¿Qué función se obtiene?. Representarla.

42) Supongamos que un jugador de fútbol patea un tiro libre de modo tal que la trayectoria de la pelota, mientras se encuentra en el aire, es la parábola correspondiente a la función $y = - 0{,}05\ x^2 + 0{,}7\ x$; donde y es la altura en metros de la pelota cuando ésta se encuentra a x metros de distancia horizontal desde el punto en el que fue lanzada. ¿Cuál será el alcance del tiro libre?.

43) Si se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ésta sube hasta un cierto punto y luego empieza a caer. La relación que existe entre el tiempo t que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura y está dada por la fórmula $y = - 5\ t^2 + 20\ t + 10$. ¿Cuándo alcanzará el punto más alto?. ¿A qué altura está ese punto?