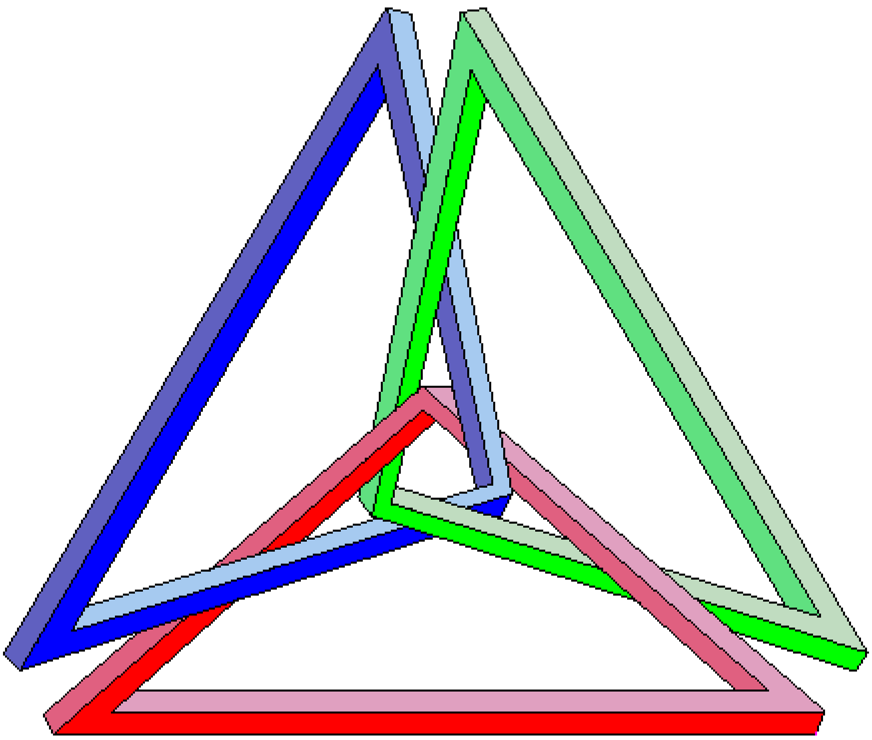
LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO



Autora: Diana Barredo Blanco

Profesora de Matemáticas

I.E.S. Luis de Camoens (CEUTA)

Índice de contenido

En este tema vamos a estudiar los aspectos más básicos de los triángulos, que ya deberías conocer de cursos pasados, pero no estaría de más que los repases y hagas los ejercicios propuestos.

Se da por conocido los tipos de ángulos (agudos, obtusos y rectos) así como los criterios de igualdad de ángulos.

Definición de triángulo

TRIÁNGULO es un polígono de tres LADOS, que viene determinado por tres puntos no colineales llamados VÉRTICES.

Los vértices se denotan por letras mayúsculas: A, B y C;

Los lados son los segmentos que unen dos vértices del triángulo y se denotan por la misma letra que el vértice opuesto, pero en minúscula. Es decir:

El lado 'a', es el segmento que une los vértices B y C.

El lado 'b', es el segmento que une los vértices A y C.

El lado 'c', es el segmento que une los vértices A y B.

Se llama ángulo de un triángulo, al ángulo que forman las rectas sobre las que se apoyan dos de sus lados incidentes en un vértice. El ángulo, se denota con la misma letra que el vértice correspondiente.

Propiedad 1:

Un triángulo tiene tres ángulos, cumpliéndose siempre que:

"la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados".

Propiedad 2: (Propiedad Triángular)

Las longitudes de los lados de un triángulo no pueden ser cualesquiera. Para que pueda construirse el triángulo, la longitud de cada lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos lados o, lo que es lo mismo:

"cada lado debe ser mayor que la diferencia de los otros dos"

Ejercicio 1:

Di en cuáles de los siguientes casos, se podría construir un triángulo cuyos lados fueran los dados: (justifica tu respuesta)

i. "a"=5cm "b"=5cm "c"=5cm

ii. "a"=3cm "b"=6cm "c"=4cm

iii. "a"=1cm "b"=1cm "c"=5cm

iv. "a"=9cm "b"=8cm "c"=2cm

v. "a"=3cm “b"=4cm "c"=5cm

vi. "a"=2cm "b"=9cm "c"=8cm

Clasificación de triángulos

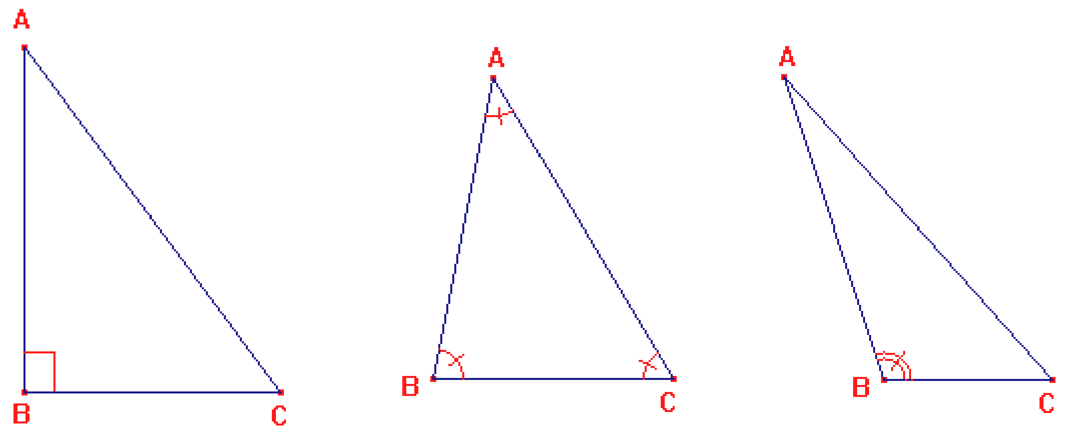
La clasificación de triángulos se hace atendiendo a dos criterios:

Atendiendo a sus lados:

- **Escalenos** (los tres lados distintos)
- **Isósceles** (dos lados iguales y otro desigual
- **Equilátero** (los tres lados iguales)

Atendiendo a sus ángulos:

- **Rectángulos** (si tiene un ángulo recto)
- **Acutángulos** (si los tres ángulos son agudos)
- **Obtusángulos** (si tiene un ángulo obtuso)



Además, si recordamos que la suma de los tres ángulos de un triángulo SIEMPRE suma 180º, se deduce lo siguiente:

- En un triángulo rectángulo, los otros dos ángulos (a parte del recto) tienen que ser agudos.
- En un triángulo obtusángulo, los otros dos ángulos (a parte del obtuso) tienen que ser agudos.

O dicho de otra forma:

Todo triángulo tiene que tener siempre DOS ángulos AGUDOS, pudiendo ser el tercero:

AGUDO (en cuyo caso el triángulo será **acutángulo**)

RECTO (en cuyo caso el triángulo será **rectángulo**)

OBTUSO (en cuyo caso el triángulo será **obtusángulo**)

Propiedad 3:

"El triángulo equilátero, es también equiángulo" (los tres ángulos son iguales, y por tanto, de 60º cada uno)

"En el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los otros dos, *catetos*".

"Un triángulo rectángulo isósceles tiene un ángulo recto y sus catetos iguales, luego los ángulos agudos también son iguales, e iguales a 45º"

Ejercicio 2:

¿Cuántos ángulos agudos, como máximo, puede tener un triángulo?

¿Cuántos ángulos obtusos, como máximo, puede tener un triángulo?

¿Cuántos ángulos agudos, como mínimo, puede tener un triángulo?

¿Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? (justifica tu respuesta)

Criterios de Igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados de la misma longitud y sus tres ángulos iguales.

Para ver si dos triángulos son iguales basta con comprobar la igualdad de parte de sus elementos. Esos elementos vienen determinados por los criterios de igualdad de triángulos. son las condiciones mínimas que se deben cumplir para que dos triángulos sean iguales.

CRITERIO 1:

"Dos triángulos son iguales si tienen iguales sus tres lados"

CRITERIO 2:

"Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo que forman dichos lados"

CRITERIO 3:

"Dos triángulos son iguales si tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos a él".

Propiedad 4:

"La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad, y se llama *paralela media* correspondiente al tercer lado".

Vamos a demostrar el resultado para una de las paralelas medias, por ejemplo, para la NM. Tendremos que justificar que la paralela al lado BC, que pasa por el punto medio del lado AB, corta al lado AC en su punto medio y además, es la mitad del lado BC.

Sea N el punto medio del lado AB:

Trazamos la paralela al lado BC por N, y sea M el punto donde dicha paralela corta al lado AC. Por dicho punto, M, trazamos la paralela al lado AB, y llamamos P al punto donde dicha paralela corta al lado BC.

Con esta construcción, se han formado dos triángulos, a saber: ANM y MPC. Dichos triángulos son iguales, por el criterio 3 de igualdad de triángulos. Veámoslo:

- Un lado igual:

  AN = NB (por ser N el punto medio de AB) y NB = MP (por ser segmentos paralelos entre paralalelas), luego: AN = MP

- Los dos ángulos contiguos iguales:

  Los ángulos contiguos al lado AN, pintados de verde y azul, son respectivamente iguales a los ángulos contiguos al lado MP, pues en ambos casos se trata de dos ángulos agudos de lados respectivamente paralelos.

Luego, los triángulos ANM y MPC son iguales, y por lo tanto, tienen iguales sus tres lados. En particular:

AM = MC $\Rightarrow$ M será pues el punto medio del lado AC $\Rightarrow$ La paralela media de AB pasa por el punto medio del lado AC

CP = MN = BP $\Rightarrow$ CP = PB $\Rightarrow$CP= $\frac{1}{2}$ BC $\Rightarrow$ La paralela media CP es la mitad del lado BC

Ejercicio 3:

Utilizando la igualdad de triángulos, demuestra:

(a) Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

(b) La diagonal de un paralelogramo, lo divide en dos triángulos iguales.

Las rectas notables de un triángulo son:

- Mediatriz
- Mediana
- Altura
- Bisectriz

Mediatrices:

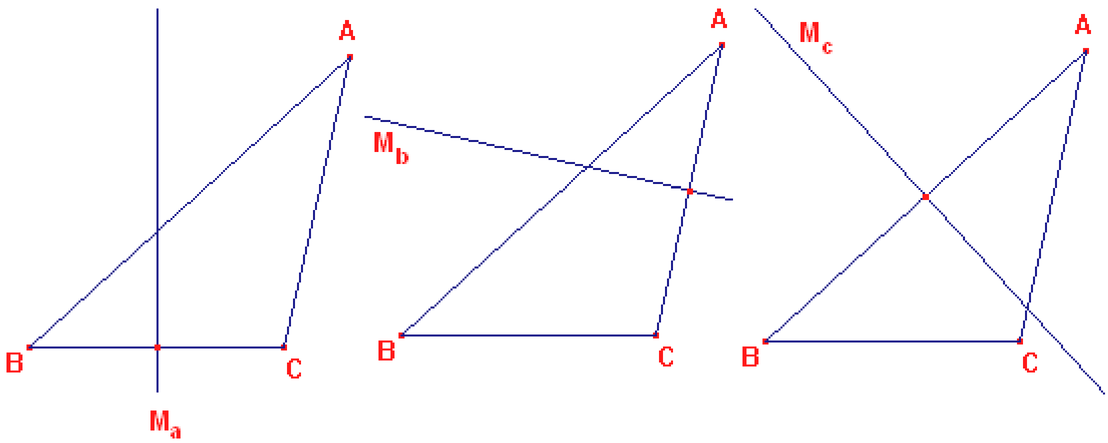
La **MEDIATRIZ** de un lado de un triángulo se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio.

Todo triángulo ABC, tiene tres mediatrices que denotaremos como sigue:

La mediatriz del lado 'a'=BC, se denota por $\mathbf{M_a}$

La mediatriz del lado 'b'=AC, se denota por $\mathbf{M_b}$

La mediatriz del lado 'c'=AB, se denota por $\mathbf{M_c}$



Construcción geométrica:

Mediatriz del lado "a"

Mediatriz del lado "b"

Mediatriz del lado "c"

Propiedad 5:

"Los puntos de la mediatriz de un lado de un triángulo equidistan de los vértices que definen dicho lado"

Ejercicio 4:

Con ayuda de una regla y un compás:

a. Dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.

b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres mediatrices de tu triángulo.

c. Elige un punto cualquiera de la mediatriz del lado AB y, con ayuda de la regla o el compás, toma la distancia de dicho punto al vértice A y compárala con la distancia de dicho punto al vértice B. ¿Cómo son esas distancias?

d. Repite el apartado anterior con otros puntos de esa misma mediatriz.

e. Repite los dos apartados anteriores con las otras dos mediatrices.

Ejercicio 5:

Utilizando los criterios de igualdad de triángulos, demuestra la propiedad 5.

Alturas:

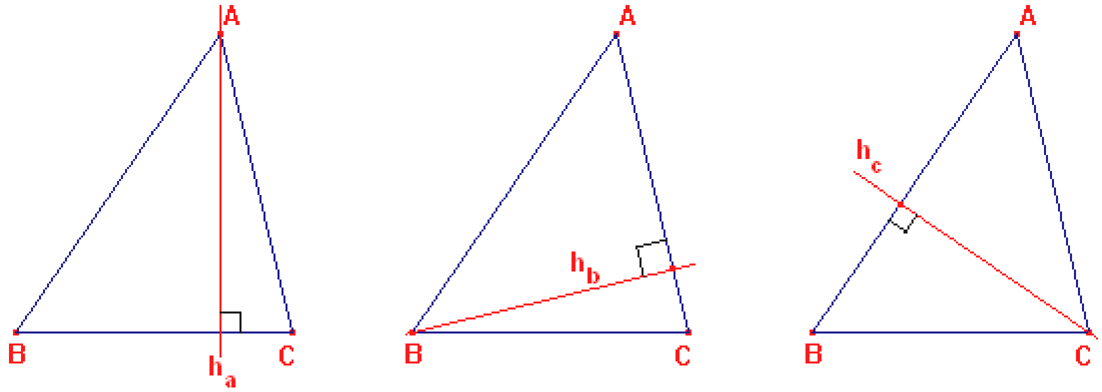
La **ALTURA** de un triángulo, respecto de uno de sus lados, se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto.

Todo triángulo ABC, tiene tres alturas que denotaremos como sigue:

La altura respecto del lado 'a'=BC, se denota por $\mathbf{h_a}$

La altura respecto del lado 'b'=AC, se denota por $\mathbf{h_b}$

La altura respecto del lado 'c'=AB, se denota por $\mathbf{h_c}$



Construcción geométrica:

- Altura respecto del lado "a"=BC
- Altura respecto de "b"=AC
- Altura respecto de "c"=AB

Propiedad 6:

Una altura puede ser interior al triángulo, exterior al mismo, o incluso, coincidir con alguno de sus lados (según el tipo de triángulo):

Si el triángulo es RECTÁNGULO:

"La altura respecto a la hipotenusa es interior, y las otras dos alturas coinciden con los catetos del triángulo"

Si el triángulo es ACUTÁNGULO:

"Las tres alturas son interiores al triángulo"

Si el triángulo es OBTUSÁNGULO:

"La altura respecto al mayor de sus lados es interior, siendo las otras dos alturas exteriores al triángulo"

Propiedad 7:

"En un triángulo isósceles, la altura correspondiente al lado desigual divide el triángulo en dos triángulos iguales"

Ejercicio 6:

1. Con ayuda de una regla y un compás:
   a. Dibuja un triángulo acutángulo y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.
   b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres alturas de tu triángulo.
   c. Observa si son interiores o exteriores al triángulo, y mira si concuerdan tus resultados con la propiedad 6.
2. Repite el mismo ejercicio con un triángulo rectángulo.
3. Repite el mismo ejercicio con un triángulo obtusángulo.

Ejercicio 7:

Utilizando los criterios de igualdad de triángulos, demuestra la propiedad 7.

Medianas:

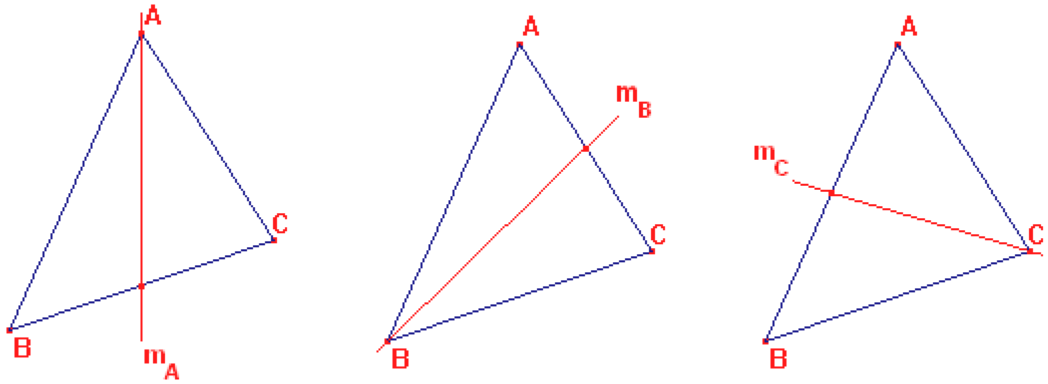
La **MEDIANA** de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, se define como la recta que une dicho vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo ABC, tiene tres medianas (una por cada vértice) que denotaremos como sigue:

Mediana correspondiente al vértice A, se denota por $\mathbf{m_A}$

Mediana correspondiente al vértice B, se denota por $\mathbf{m_B}$

Mediana correspondiente al vértice C, se denota por $\mathbf{m_C}$



Construcción geométrica:

- Mediana correspondiente al vértice A
- Mediana correspondiente al vértice B
- Mediana correspondiente al vértice C

Propiedad 8:

"Las tres medianas de un triángulo son interiores al mismo, independientemente del tipo de triángulo que sea"

Propiedad 9:

"Cada mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de igual área"

Ejercicio 8:

Con ayuda de una regla y un compás:

a) Dibuja un triángulo acutángulo y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.

b) Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres medianas de tu triángulo.

c) Observa si coincide tu resultado con la propiedad 8.

d) Calcula el área de los dos triángulos en que la mediana m_A divide al triángulo ABC y comprueba que se cumple la propiedad 9.

Repite el mismo ejercicio con un triángulo rectángulo.

Repite el mismo ejercicio con un triángulo obtusángulo.

Ejercicio 9:

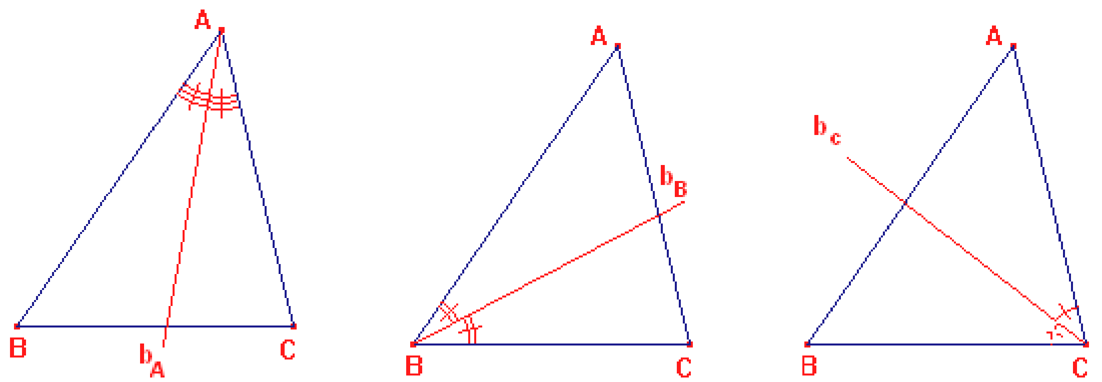
Demuestra la propiedad 9.

Bisectrices:

La **BISECTRIZ** de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, se define como la recta que, pasando por dicho vértice, divide al ángulo correspondiente en dos partes iguales.

Todo triángulo ABC, tiene tres bisectrices (una por cada ángulo) que denotaremos como sigue:

- Bisectriz correspondiente al ángulo A, se denota por $\mathbf{b_A}$
- Bisectriz correspondiente al ángulo B, se denota por $\mathbf{b_B}$
- Bisectriz correspondiente al ángulo C, se denota por $\mathbf{b_C}$



Construcción geométrica:

[Bisectriz correspondiente al vértice A]

[Bisectriz correspondiente al vértice B]

[Bisectriz correspondiente al vértice C]

Propiedad 10:

"Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo"

Es decir: si trazamos perpendiculares desde un punto a los dos lados, los segmentos que se forman son de la misma longitud.

Ejercicio 10:

Con ayuda de una regla y un compás:

a. Dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.

b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres bisectrices de tu triángulo.

c. Comprueba sobre tu dibujo que se cumple la propiedad 10.

Los puntos notables de un triángulo son:

Circuncentro

Según se vio en la lección anterior, cualquier punto de la mediatriz de un lado de un triángulo equidista de los vértices que definen dicho lado. Luego si llamamos **O** al punto de intersección de las mediatrices de los lados AB y BC , por la propiedad anterior, el punto**O** equidista de los vértices A y B (por estar en la mediatriz de AB) y de los vértices B y C (por estar en la mediatriz de BC). Luego equidista de A , B y C .

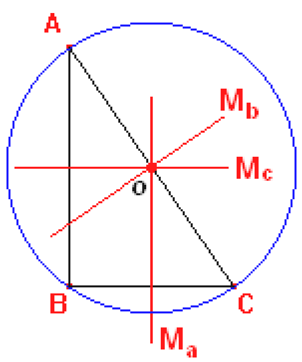
Al equidistar de los tres vértices del triángulo, en particular, equidista de A y C, lo que demuestra que también estará en la mediatriz del lado AC y, además, será el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

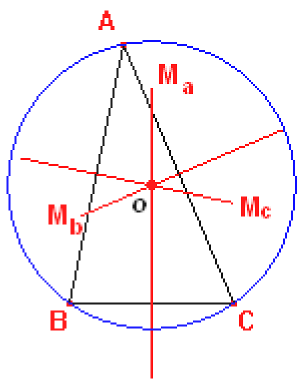
De lo anterior, concluímos:

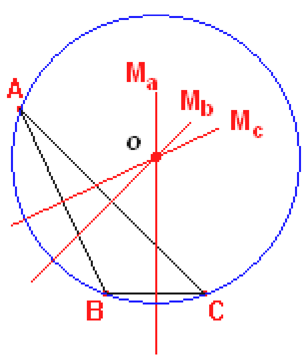
1. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un ÚNICO punto, que denotaremos por **O,** y que recibe el nombre de **CIRCUNCENTRO**.

2. El punto de corte de las tres mediatrices es el CENTRO de un circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, que llamaremos **circunferencia circunscrita**.

Observa el circuncentro en los casos de que el triángulo sea rectángulo, acutángulo u obtusángulo, respectivamente.







Propiedad 11:

A la vista de los dibujos anteriores, podemos enunciar la siguiente propiedad:

"El Circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa"

"El Circuncentro de un triángulo acutángulo está en el interior del triángulo"

"El Circuncentro de un triángulo obtusángulo está en el exterior del triángulo"

Ejercicio 11:

1. Con ayuda de una regla y compás::
    a. Dibuja un triángulo acutángulo cualquiera.
    b. Dibuja dos de sus mediatrices (las que tú quieras).
    c. Señala el punto de intersección de ambas.
    d. Traza la circunferencia con centro en ese punto y radio la distancia al vértice A.
    e. Comprueba que dicha circunferencia pasa por los vértices B y C.
2. Repite el ejercicio anterior con un triángulo rectángulo.
3. Repite el ejercicio anterior con un triángulo obtusángulo.
4. Comprueba que se ha verificado la propiedad 11 en cada uno de los triángulos que has dibujado.

Incentro

Según se vio en la lección anterior, cualquier punto de la bisectriz de un ángulo de un triángulo equidista de los lados que definen dicho ángulo. Luego si llamamos **I** al punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y B, por la propiedad anterior, el punto **I** equidista de los lados AB y AC (por estar en la bisectriz de A) y de los lados AB y BC (por estar en la bisectriz de B). Luego equidista de los lados AB , BC y CA..

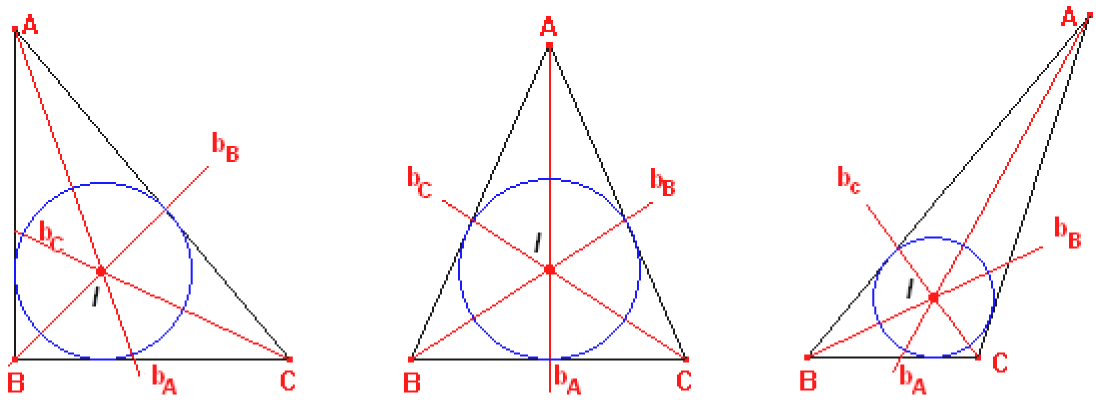
Al equidistar de los tres lados del triángulo, en particular, equidista de CA y CB, lo que demuestra que también estará en la bisectriz del ángulo C y, además, será el centro de una circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

De lo anterior, concluímos:

1. Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un ÚNICO punto, que denotaremos por **I,** y que recibe el nombre de **INCENTRO**.

2. El punto de corte de las tres bisectrices es el CENTRO de un circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, que llamaremos **circunferencia inscrita**.

Observa el incentro en los casos de que el triángulo sea rectángulo, acutángulo u obtusángulo, respectivamente.



Propiedad 12:

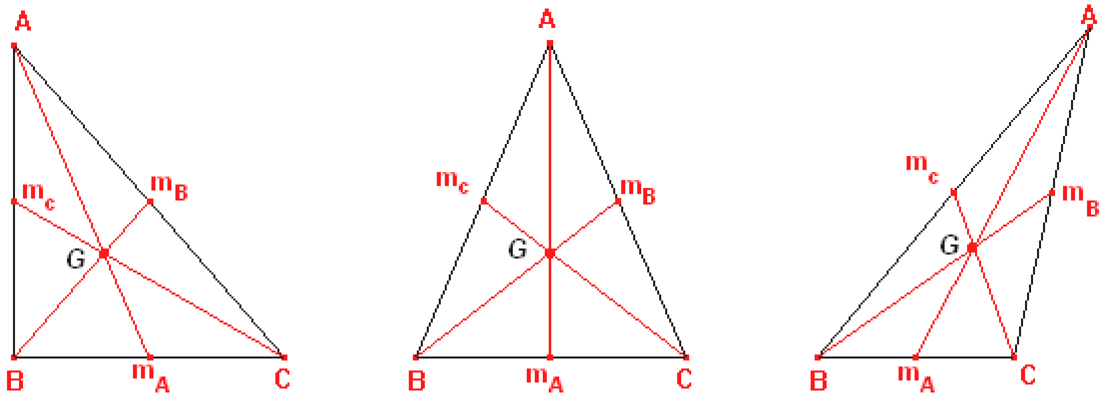
"El incentro de un triángulo cualquiera está siempre en el interior del triángulo"

Ejercicio 12:

1. Con ayuda de una regla y compás::
   a. Dibuja un triángulo acutángulo cualquiera.
   b. Dibuja dos de sus bisectrices (las que tú quieras).
   c. Señala el punto de intersección de ambas.
   d. Traza la circunferencia con centro en ese punto y tangente al lado AB.
   e. Comprueba que dicha circunferencia también es tangente a los otros dos lados.
2. Repite el ejercicio anterior con un triángulo rectángulo.
3. Repite el ejercicio anterior con un triángulo obtusángulo.
4. En cada uno de los triángulos que has dibujado, comprueba que el incentro está siempre en el interior del triángulo.

Baricentro

Las tres medianas de un triángulo, al igual que ocurría con las mediatrices y bisectrices, se cortan en un ÚNICO punto, que llamaremos **BARICENTRO**.

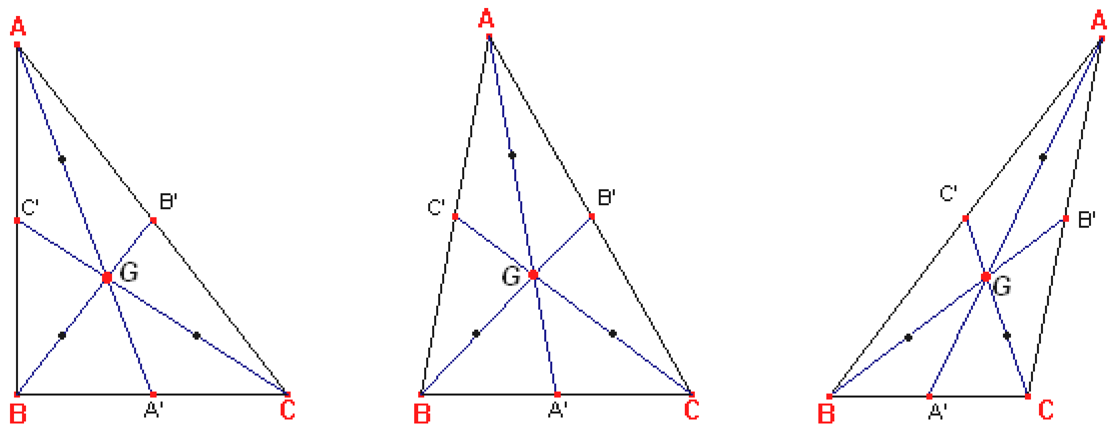


Como puedes ver en los dibujos anteriores, no hay diferencias significativas en la situación del baricentro, dependiendo del tipo de triángulo (rectángulo, acutángulo u obtusángulo). En cualquier triángulo, el baricentro siempre es interior al mismo, más aún, es el centro de gravedad del triángulo y se denotará por **G**.

Propiedad 13:

> **"El baricentro de un triángulo, es un punto interior al mismo, que dista el doble de cada vértice que del punto medio de su lado opuesto"**

Sin entrar en la demostración, que se sale fuera de los objetivos de este curso, sí que lo veremos gráficamente en los tres casos: triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos, respectivamente.



Se han denotado por A', B', C', los puntos medios de los lados "a "=BC, "b "=AC y "c "=AB, respectivamente, y se ha señalado el punto medio de las distancias del baricentro a cada vértice, mediante un punto negro sin etiquetar.

A la vista de los anterior, se observa que:

$GA = 2 \cdot GA'$	**(la distancia de Baricentro al vértice A es igual a dos veces la distancia del baricentro al punto medio del lado "a"=BC)**
$GB = 2 \cdot GB'$	**la distancia de Baricentro al vértice A es igual a dos veces la distancia del baricentro al punto medio del lado "a"=BC)**
$GC = 2 \cdot GC'$	**(la distancia de Baricentro al vértice C es igual a dos veces la distancia del baricentro al punto medio del lado "c"=AB)**

Ejercicio 13:

1. Con ayuda de regla y compás:

    a. Dibuja un triángulo cualquiera.

    b. Traza geométricamente dos de las medianas.

    c. Señala el punto donde se han cortado ¿cómo se llama ese punto?.

    d. Traza la tercera mediana y comprueba que pasa por dicho punto.

2. Con el compás:

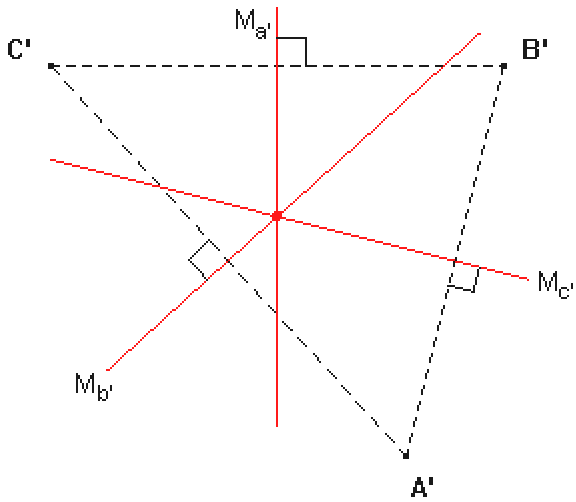
    a. Toma la medida del baricentro al punto medio del lado AB.

    b. Comprueba que puedes llevar esta medida, sobre la mediana, DOS veces desde el baricentro hasta el vértice C.

3. Repite el apartado anterior con las otras dos medianas.

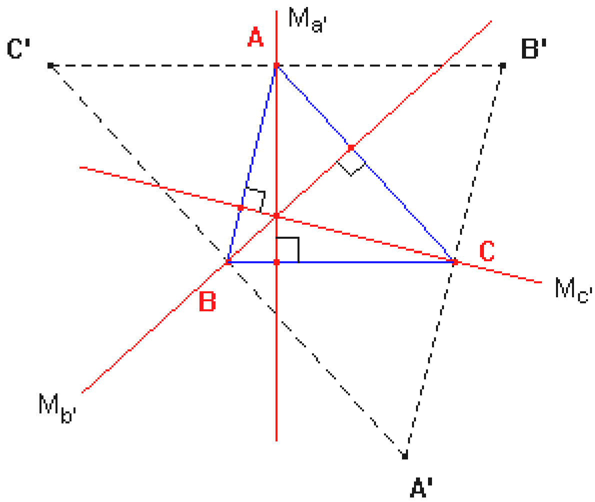
Ortocentro

Consideremos un triángulo de vértices A', B' y C'. Ya demostramos que las mediatrices de dicho triángulo se cortaban en un único punto, llamado circuncentro.

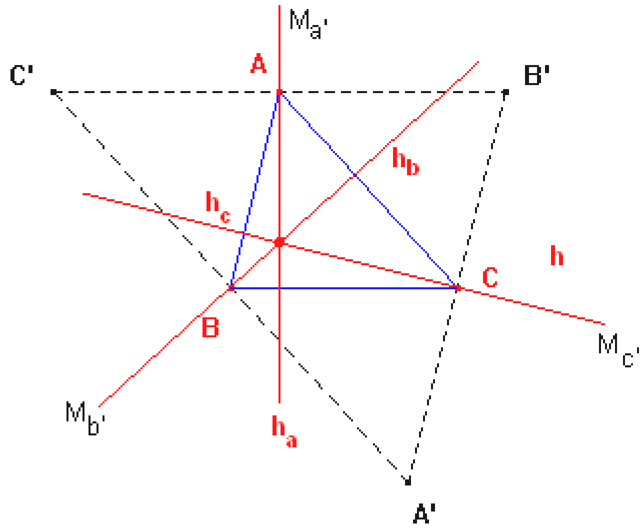


Ahora bien, si llamas A , B y C a los puntos medios de los lados B'C', A'C' y A'B' , respectivamente, y consideras el triángulo ABC, podemos comprobar lo siguiente:

- Los lados de los triángulos ABC y A'B'C', son respectivamente paralelos.
- La mediatriz del lado A'B' es la perpendicular a A'B' que pasa por su punto medio (C), luego será también perpendicular a AB (por ser paralelo a A'B'). Así pues, considerando el triángulo ABC, dicha recta es perpendicular a AB pasando el vértice C,o lo que es lo mismo, es la altura del triángulo ABC respecto del lado AB.



Análogo razonamiento nos lleva a deducir que la mediatriz del lado A'C' del triángulo A'B'C', coincide con la altura del triángulo ABC respecto del lado AC. Y, la mediatriz del lado B'C' del triángulo A'B'C', coincide con la altura del triángulo ABC respecto del lado BC.



Las alturas del triángulo ABC, son las mediatrices del A'B'C', y como las mediatrices de cualquier triángulo se cortaban en un único punto, podemos deducir:

Las alturas de cualquier triángulo se cortan en un único punto, que llamaremos **ORTOCENTRO**, y que denotaremos por **H**.

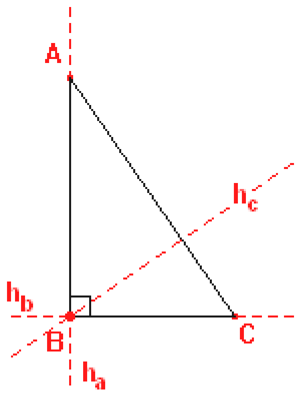
Además, el ortocentro de este triángulo coincide con el circuncentro de un triángulo semejante al dado, y que tiene los vértices del primero como puntos medios de sus lados.

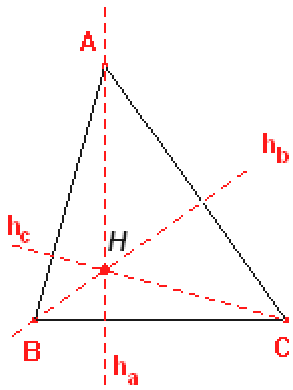
Propiedad 14:

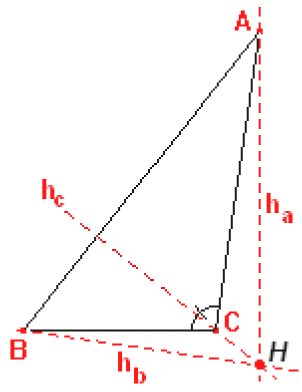
"El Ortocentro de un triángulo rectángulo es el vértice correspondiente al ángulo recto"

"El Ortocentro de un triángulo acutángulo está en el interior del triángulo"

"El Ortocentro de un triángulo obtusángulo está en el exterior del triángulo"







Ejercicio 14:

1. Con ayuda de una regla y compás:

    a. Dibuja un triángulo acutángulo cualquiera ABC.

    b. Dibuja dos de sus alturas, tal y como se explicó en la construcción geométrica de la altura.

    c. Señala el punto de intersección de ambas. ¿cómo se llama dicho punto?

    d. ¿El ortocentro está dentro o fuera del triángulo?

2. Con ayuda de una regla y compás:

    a. Dibuja un triángulo obtusángulo cualquiera ABC.

    b. Dibuja otro triángulo A'B'C' que tenga los vértices A, B, y C, como puntos medios de sus lados.

    c. Calcula dos mediatrices del triángulo A'B'C', tal y como se explicó en la construcción geométrica de la mediatriz.

    d. Señala el punto de intersección de ambas mediatrices. ¿cómo se llama dicho con respecto al triángulo ABC?

    e. ¿El ortocentro está dentro o fuera del triángulo?

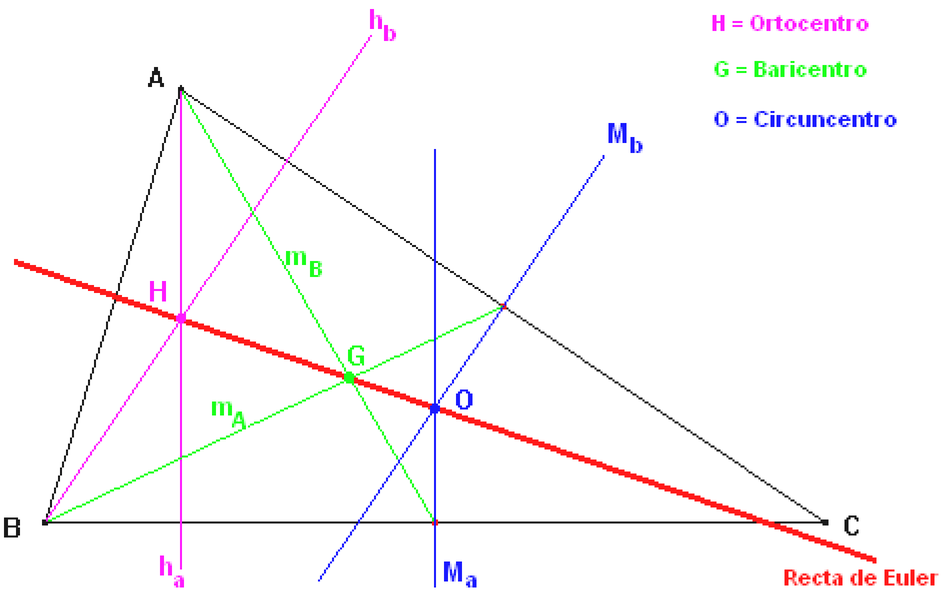
Propiedad 15:

El Ortocentro, Baricentro y Circuncentro están siempre ALINEADOS.

El baricentro está ENTRE el ortocentro y circuncentro.

La distancia del baricentro al circuncentro es la mitad que la distancia del baricentro al ortocentro.

Además, la recta que pasa por los tres puntos citados (Ortocentro, Baricentro y Circuncentro) se llama **RECTA DE EULER**.



Ejercicio 15:

1. Con ayuda de regla y compás:

   a. Dibuja un triángulo acutángulo cualquiera.

   b. Traza geométricamenSte el Ortocentro, Baricentro y circuncentro.

   c. Dibuja la Recta de Euler.

2. Con el compás:

    a. Toma la medida del baricentro al circuncentro.

    a. Comprueba que puedes llevar esta medida, sobre la recta de Euler, DOS veces desde el baricentro hasta el ortocentro.

2. Repite los apartados 1 y 2 con un triángulo rectángulo.

3. Repite los apartados 1 y 2 con un triángulo obtusángulo.

En este tema vamos a estudiar los teoremas o resultados aplicables a TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: el teorema de Pitágoras, que ya deberíais conocer, y otros teoremas que se demuestran a partir de él y que reciben el nombre de teorema del Cateto y teorema de la Altura.

Hay que tener mucho cuidado cuando se utilicen estos teoremas, y asegurarse de que el triángulo a quien se lo estamos aplicando sea rectángulo, bien porque nos lo diga el enunciado del problema, o bien porque nos tomemos la molestia de comprobarlo matemáticamente. En ningún caso, se puede decir que un triángulo es rectángulo porque "me lo parece en el dibujo..." (un ángulo de 88º "se parece" mucho gráficamente a un recto y, desde luego, no es recto).

Teorema de Pitágoras

Este teorema, enunciado por el matemático griego Pitágoras en el siglo V a.C., es uno de los resultados más conocidos e importantes de la geometría y posee gran cantidad de aplicaciones tanto en distintas partes de las matemáticas como en situaciones de la vida diaria.

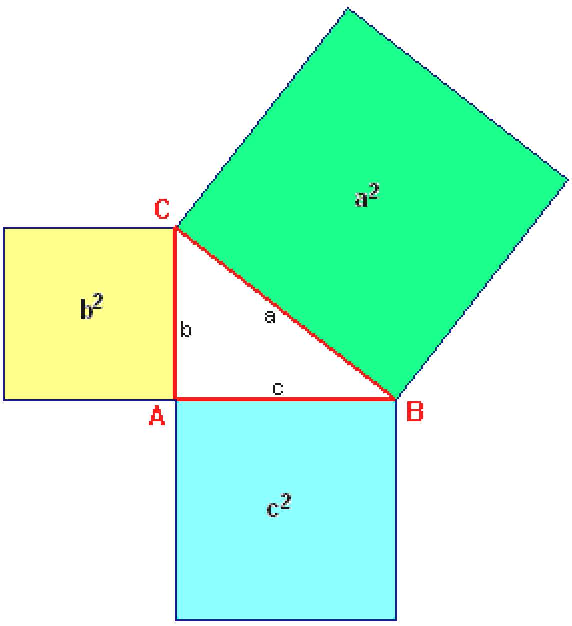
El teorema se aplica a los triángulos rectángulos, y dice los siguiente:

"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Si llamamos "a" a la hipotenusa de un triángulo rectángulo y "b", "c" a los catetos, se verifica:$a^2=b^2+c^2$

A los grupos de tres números "a", "b" y "c" que verifican $a^2=b^2+c^2$ se les llama "ternas pitagóricas".

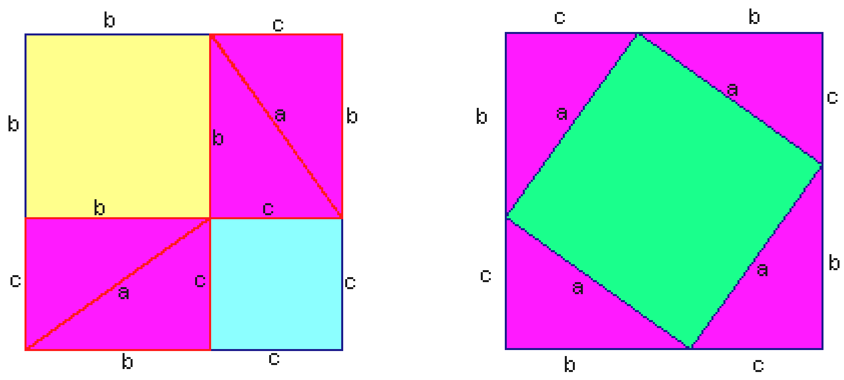
Gráficamente, el teorema de Pitágoras se expresa de la forma siguiente:



"En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos"

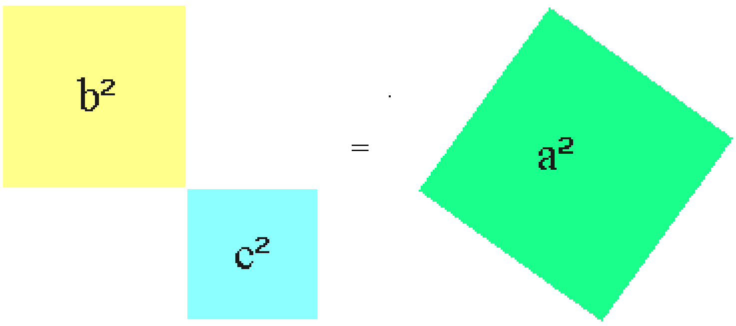
El teorema de Pitágoras es sencillo de probar, y tiene muchas demostraciones de diversos tipos, pero la más sencilla puede ser la siguiente:

Mira las dos figuras siguientes:



Ambas son dos cuadrados de lado (b+c), y en las dos puedes ver que aparecen cuatro triángulos rectángulos de lados "a", "b" y "c", en color rosa todos ellos.

Eso quiere decir, que las partes restantes en cada uno de los cuadrados de lado (b+c) deben tener el mismo área.

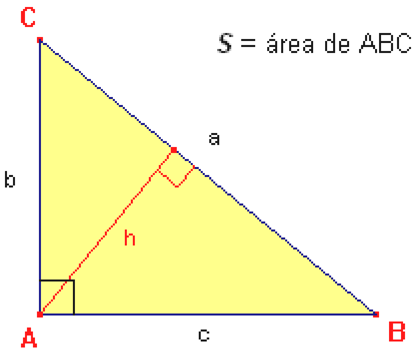


En el primero, la parte restante son los cuadrados amarillo y azul, de áreas b^2 y c^2; en el segundo el cuadrado verde, de área a^2. Esas áreas deben ser iguales, es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema del Altura

Sea un triángulo rectángulo, cuyos catetos denotaremos por "b" y "c", siendo "a" la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto) y "h" la altura del triángulo sobre la hipotenusa:



De las tres alturas que tiene un triángulo rectángulo, dos de ellas son los catetos; y la tercera, la altura sobre la hipotenusa, está relacionada con los lados del triángulo por la siguiente relación:

"El producto de los dos catetos, de un triángulo rectángulo, coincide con el producto de la hipotenusa por la altura sobre ella"

La expresión del área de un triángulo ("área igual a base por altura dividido entre dos") vamos a aplicarla dos veces al triángulo rectángulo ABC.

- Considerando un cateto como base (el otro sería la altura correspondiente)

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

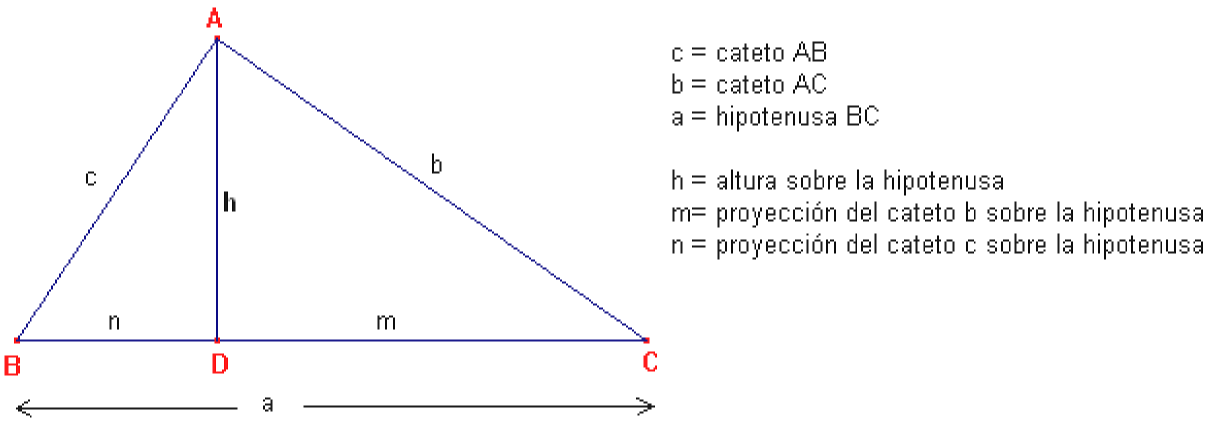
- Considerando la hipotenusa como base, se tiene la siguiente igualdad:

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

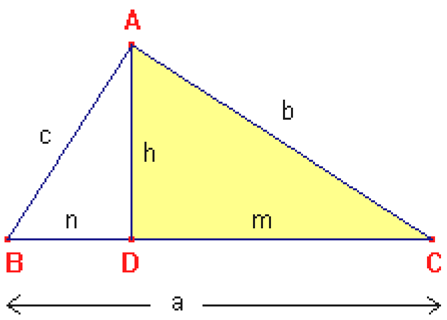
Luego, igualando ambas expresiones, se obtiene: $b \cdot c = a \cdot h$

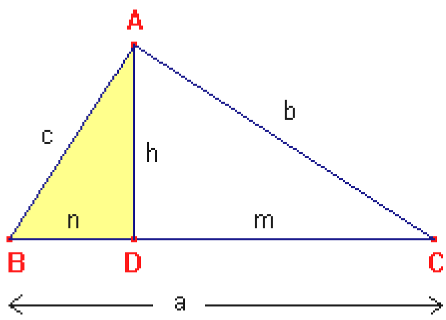
El teorema de la altura nos da otra relación: la relación entre la altura sobre la hipotenusa y las proyecciones de los catetos sobre la misma:

Denotaremos por "h" la altura del triángulo sobre la hipotenusa y por "m", "n" a las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



A parte del triángulo ABC, que por definición es rectángulo, al trazar la altura sobre la hipotenusa, aparecen dos nuevos triángulos rectángulos (por ser la altura perpendicular a la base), a saber, ADC y ADB.





- Aplicamos Pitágoras al ADC $\Rightarrow$ $b^2 = h^2 + m^2$
- Aplicamos Pitágoras al ADC $\Rightarrow$ $c^2 = h^2 + n^2$

Además, dado que ABC era un triángulo rectángulo,

- Aplicando de nuevo Pitágoras $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Sustituyendo en la última expresión b^2 y c^2 por las expresiones obtenidas anteriormente, resulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 = (h^2+m^2) + (h^2+n^2) = 2\ h^2+m^2+n^2$$

Por otra parte, $a = m + n$ de donde:

$$a^2 = (m+n)^2 = m^2+n^2+2\cdot mn$$

Igualando ambas expresiones equivalentes a a^2:

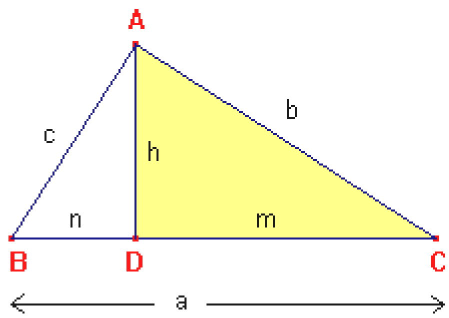
$$2\ h^2+m^2+n^2 = m^2+n^2+2\cdot mn \quad \Rightarrow \quad 2\ h^2 = +2\cdot mn \quad \Rightarrow \quad h^2 = m\cdot n$$

El resultado anterior se conoce con el nombre de Teorema de la Altura, y se enuncia de la siguiente manera

"En un triangulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa"

Teorema del Cateto

Considerando de nuevo el triángulo ADC:



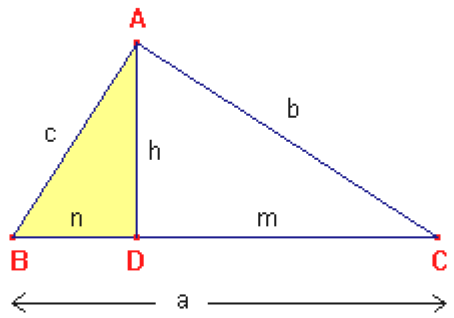
y aplicando Pitágoras: $b^2 = h^2 + m^2$

Por el teorema de la altura, que acabamos de demostrar, se cumple: $h^2 = m \cdot n$

Y sustituyendo la segunda expresión en la primera, se obtiene:

$$b^2 = m \cdot n + m^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = m \cdot (n + m) = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad b^2 = m \cdot a$$

Considerando ahora el triángulo ADB:



y aplicando Pitágoras: $c^2 = h^2 + n^2$

Por el teorema de la altura, que acabamos de demostrar, se cumple: $h^2 = m \cdot n$

Y sustituyendo la segunda expresión en la primera, se obtiene:

$$c^2 = m \cdot n + n^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = n \cdot (m + n) = n \cdot a \quad \Rightarrow \quad c^2 = n \cdot a$$

Ambos resultados:

$b^2 = m \cdot a$ y $c^2 = n \cdot a$

Se conocen con el nombre de Teorema del cateto que se enuncia de la siguiente forma:

"El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la hipotenusa"

En este tema vamos a estudiar resultados que pueden aplicarse a un triángulo cualquiera, sea o no sea rectángulo.

Teorema de Pitágoras Generalizado

El Teorema de Pitágoras, válido sólo para los triángulos rectángulos, nos da el valor del cuadrado del lado opuesto al ángulo recto (hipotenusa) en función de los otros dos lados (catetos).

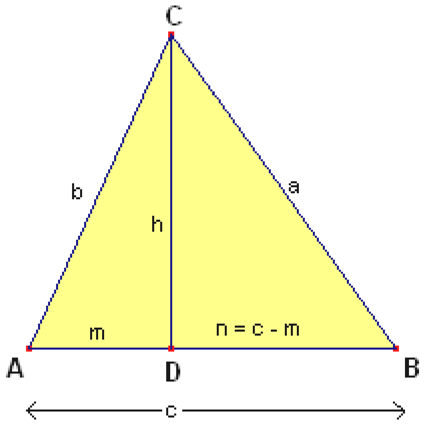
Para triángulos no rectángulos, se puede hallar también el valor del cuadrado de un lado, por aplicación de un resultado que se conoce con el nombre de Teorema Generalizado de Pitágoras, que, para el caso particular de un triángulo rectángulo, coincide con el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, por ser una generalización del mismo.

Hay dos casos, según que el lado se oponga a un ángulo agudo o a un ángulo obtuso.

Cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo:

Sea un triángulo acutángulo cualquiera. Para hallar el cuadrado de uno de sus lados, por ejemplo el lado "*a*" -opuesto al vértice *A*-, trazaremos la altura sobre cualquiera de los otros dos lados.

En la siguiente figura, se ha trazado la altura sobre el lado "*c*" y se denota por "*m*" la proyección de "*b*" sobre "*c*".



Como se observa en la figuara anterior, dicha altura divide el triángulo *ABC* en dos triángulos rectángulos: *ADC* y *CDB*.

Por ser *CDB* triángulo rectángulo, podemos aplicarle el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2+(c-m)^2=h^2+c^2+m^2-2\cdot cm$$

Como *ADC* también es un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = b^2-m^2$$

Sustituyendo, el segundo resultado obtenido, en la primera expresión resulta:

$$a^2 = (b^2-m^2)+c^2+m^2-2\cdot cm = b^2+c^2-2\cdot cm$$

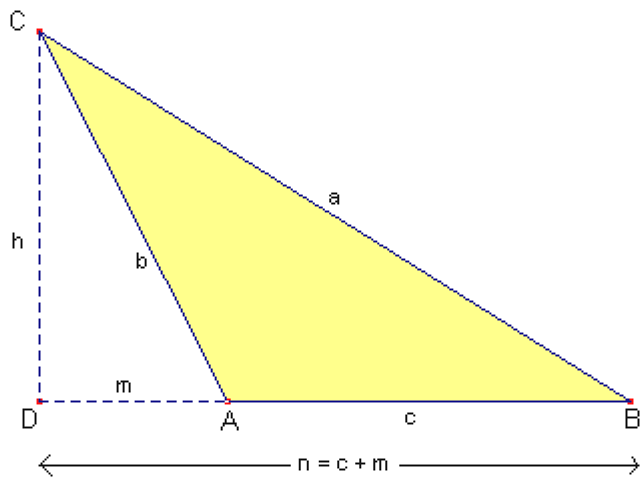
$$a^2 = b^2+c^2-2\cdot cm$$

Expresión que se conoce como teorema generalizado de Pitágoras, y que dice lo siguiente:

"El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de loso otros dos lados menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él"

Cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso:

Sea un triángulo obtusángulo cualquiera. Para hallar el cuadrado de lado opuesto al ángulo obtuso, trazaremos la altura sobre cualquiera de los otros dos lados. En la siguiente figura, se ha trazado la altura sobre el lado "*c*" y se denota por "*m*" la proyección de "*b*" sobre "*c*".



Como se ve en la figura anterior, al trazar la altura, aparecen dos triángulos rectángulos, *CDA* y *CDB*, a los que podremos aplicar el teorema de Pitágoras.

Por ser *CDB* triángulo rectángulo, y por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + c^2 + m^2 + 2\cdot cm$$

Como *CDA* también es un triángulo rectángulo, y otra vez, por el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - m^2$$

Sustituyendo, el segundo resultado obtenido, en la primera expresión resulta:

$$a^2 = (b^2 - m^2) + c^2 + m^2 + 2\cdot cm = b^2 + c^2 + 2\cdot cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\cdot cm$$

Expresión que se conoce como teorema generalizado de Pitágoras, y que dice lo siguiente:

"El cuadrado del lado opuesto a un <u>ángulo obtuso</u> es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados <u>más</u> el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él"

Particularización al caso de triángulos rectángulos:

Si observas los dibujos anteriores, hemos denotado por "*m*" la proyección del lado "*b*" sobre el "*c*". Ahora bien, esa proyección es tanto más pequeña cuanto más próximo a un ángulo recto sea el ángulo opuesto al lado "*a*".

En el caso extremo, de que dicho ángulo fuera recto (triángulo rectángulo), la proyección "*m*" sería nula ($m = 0$).

Si sustituyes ese caso extremo ($m = 0$), en cualquiera de las expresiones anteriores, se obtiene el mismo resultado:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que no es otra cosa que el Teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos.

Teorema de la Altura Generalizado

El teorema de la altura generalizado, permite calcular la altura sobre cualquier lado de un triángulo no rectángulo.

Se va a utilizar lo siguiente:

- Teorema de Pitágoras:

- Valor de la proyección, obtenido despejando en el teorema de Pitágoras generalizado:

$$m = \frac{\pm b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot c}$$

- La igualdad notable: $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

El triángulo *ABC*, no es rectángulo, pero al trazar la altura sobre el lado "*c*", que denotaremos por "h_c", se divide en dos triángulos rectángulos. Nos fijamos en el triángulo *CDA* -véase figuara anteriores-, que como hemos dicho es un triángulo rectángulo, y le aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = m^2 + h_c^2 \quad \Rightarrow h_c^2 = b^2 - m^2$$

En la expresión anterior, sustituimos el valor de la proyección "*m*", y operamos:

$$h_c^2 = b^2 - m^2 =$$

$$= b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,c^2} =$$

$$= \frac{(2\,b\,c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{(2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2)\cdot(2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2)}{4\,c^2} =$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2]\cdot[a^2 - (b-c)^2]}{4\,c^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b-c)}{4\,c^2} =$$

Por tanto, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el valor de la altura sobre el lado "*c*".

Por análogo razonamiento, se obtendrían las expresiones de las otras dos alturas, sobre los lados "*a*" y "*b*", respectivamente:

$$h_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}}{2\cdot a}$$

$$h_b = \frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}}{2\cdot b}$$

$$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}}{2\cdot c}$$

El resultado anterior, que se conoce como "Teorema de la Altura Generalizado", permite calcular las tres alturas de un triángulo no rectángulo, en función de sus tres lados.

Fórmula de Herón

Si se pudiera calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados, se podría calcular el área de cualquier polígono, regular o no, ya que basta con descomponerlo en triángulos. La fórmula que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, se llama fórmula de Herón, ya que la primera noticia sobre ella se debe a este matemático griego.Esta fórmula es la más útil para calcular áreas de triángulos, ya que la medida de los lados es una operación fácil.

Por un lado, sabemos que el área de un triángulo cualquiera ABC, es "base por altura dividido entre dos"

$$\acute{A}rea = \frac{(base\cdot altura)}{2}$$

Por otro lado, según se vio en el apartado anterior, se puede expresar cualquiera de las tres alturas de un triángulo en función de sus tres lados. Luego tomando como base el lado "c", la altura correspondiente será:

$$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}}{2\cdot c}$$

y el área:

$$\text{Area} = \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{\cancel{c}}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b-c)}}{2\cancel{c}}$$

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b-c)}}{4}$$

En este tema vamos a ver algunas aplicaciones y ejemplos de los teoremas vistos en los dos temas anteriores.

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Aplicación 1:

"Conocidos dos de los lados de un triángulo rectángulo, calcular el tercero"

Ejemplo 1:

Sabiendo que los siguientes triángulos son rectángulos, calcula el valor de el tercer lado.

i. **Cateto=3cm Cateto=4cm**

Cateto="b"=3cm

Cateto="c"=4cm

Hipotenusa="a"=??

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow$$
$$a^2 = 25 \Rightarrow$$
$$a = \sqrt{25} = 5$$

Hipotenusa = 5cm

ii. Cateto=5cm Hipotenusa=13cm

Cateto Mayor: "b" = ???

Cateto Menor: "c" = 5 cm

Hipotenusa: "a" = 13 cm

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = b^2 + 5^2$$
$$169 = b^2 + 25$$
$$b^2 = 169 - 25$$
$$b^2 = 144$$
$$b = \sqrt{144} = 12$$

Cateto Mayor = 12 cm

Aplicación 2:

"Clasificar un triángulo cualquiera, de lados conocidos, atendiendo a sus ángulos en:

- **Rectángulo** (cuando se cumpla: $a^2=b^2+c^2$, siendo "a" el mayor de los lados)
- **Acutángulo** (cuando se cumpla: $a^2<b^2+c^2$, siendo "a" el mayor de los lados)
- **Obtusángulo** (cuando se cumpla: $a^2>b^2+c^2$, siendo "a" el mayor de los lados)"

Ejemplo:

Clasifica los siguientes triángulos atendiendo a sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y a sus ángulos (rectángulo, acutángulo, obtusángulo)

i. 5cm 5cm 5cm

Lados: "a"=5 "b"=5 "c"=5

Atendiendo a sus lados: **"equilátero"** ("a"="b"="c")
Atendiendo a sus ángulos: **"acutángulo"** ($5^2<5^2+5^2$)

ii. 3cm 6cm 4cm

Lados: "a"=6 (el mayor) "b"=4 "c"=3

Atendiendo a sus lados: **"escaleno"** ("a">"b">"c")

Atendiendo a sus ángulos: **"obtusángulo"** ($6^2>4^2+3^2$)

iii. 1cm 2cm 2cm

Lados: "a"=2 (el mayor) "b"=2 "c"=1

Atendiendo a sus lados: **"isósceles"** ("a"="b">"c")

Atendiendo a sus ángulos: **"acutángulo"** ($2^2<2^2+1^2$)

iv. 7cm 13cm 7cm

Lados: "a"=13 (el mayor) "b"=7 "c"=7

Atendiendo a sus lados: **"isósceles"** ("a">"b"="c")

Atendiendo a sus ángulos: **"obtusángulo**($13^2>7^2+7^2$)

v. 3cm 4cm 5cm

Lados: "a"=5 (el mayor) "b"=4 "c"=3

Atendiendo a sus lados: **"escaleno"** ("a">"b">"c")

Atendiendo a sus ángulos: **"rectángulo"** ($5^2=4^2+3^2$)

vi. 7cm 9cm 8cm

Lados: "a"=9 (el mayor) "b"=8 "c"=7

Atendiendo a sus lados: **"escaleno"** ("a">"b">"c")

Atendiendo a sus ángulos: **"acutángulo"** ($9^2<8^2+7^2$)

Aplicaciones del teorema de la altura

Aplicación 1:

"Construcción geométrica del segmento medio proporcional a dos segmentos dados"

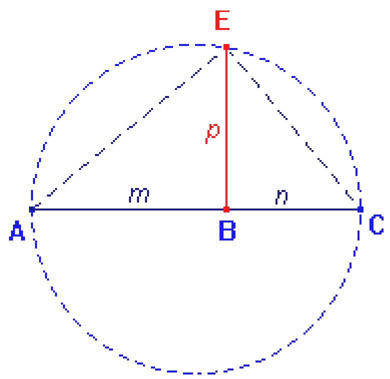
Dados dos segmentos de longitudes m y n, buscamos el segmento de longitud p, tal que: $\frac{m}{p}=\frac{p}{n}$

Si despejamos en la proporción anterior, se trata de buscar un segmento de longitud p, tal que: $p^2 = m \cdot n$ que, recordando el teorema de la altura, equivale a construir geométricamente la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidas las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.

1. Dibujamos un segmento AC, cuya longitud sea la suma de las longitudes de los dos segmentos: AC = AB + BC = m + n

2. Trazamos la circunferencia de diámetro el segmento m + n

3. Levantamos la perpendicular al diámetro por el punto B



4. El punto E, punto de corte de esta perpendicular y la circunferencia, nos da el segmento BE, segmento buscado y de longitud p.

El ángulo en E es recto (abarca un diámetro) y, en el triángulo rectángulo AEC, por el teorema de la altura, ésta al cuadrado es igual al producto de las proyecciones: $p^2 = m \cdot n$

Aplicación 2:

"Representación gráfica de una raíz cuadrada no exacta (número irracional)"

En la recta real es muy fácil representar ciertos números irracionales, aquellos que vienen dados en forma de raíz cuadrada no exacta de un número.

Basta observar que el segmento de longitud "raíz cuadrada de n" es media proporcional de dos segmentos de longitudes "n" y "1", respectivamente, luego el problema se reduce al caso anterior, tomando el segmento AB de longitud "n" y el segmento AC de longitud "1".

1. Dibujamos un segmento AC, cuya longitud sea la suma de las longitudes de los dos segmentos: AC = AB + BC = n + 1

2. Trazamos la circunferencia de diámetro el segmento n+1

3. Levantamos la perpendicular al diámetro por el punto B

4. El punto E, punto de corte de esta perpendicular y la circunferencia, nos da el segmento BE, segmento buscado y de longitud "raíz cuadrada de n" .

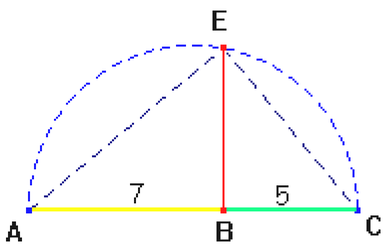
Ejemplo 1:

Construir el segmento medio proporcional de los segmentos AB y BC siguientes:

i. AB = 7cm BC = 5cm

Segmentos: AB = 7cm BC = 5cm

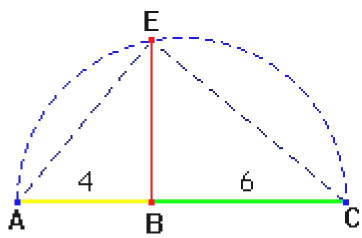
1. Dibujamos un segmento AC, cuya longitud sea:
   AC = AB + BC =7cm + 5cm = 12cm
2. Trazamos la circunferencia de diámetro AC = 12cm
3. Levantamos la perpendicular al diámetro por el punto B
4. El punto E, punto de corte de esta perpendicular y la circunferencia, nos da el segmento buscado BE.



ii. AB=4cm BC=6cm

Segmentos: AB=4cm BC=6cm

1. Dibujamos un segmento AC, cuya longitud sea:
   AC = AB + BC =4cm + 6cm = 10cm
2. Trazamos la circunferencia de diámetroAC = 10cm
3. Levantamos la perpendicular al diámetro por el punto B.
4. El punto E, punto de corte de esta perpendicular y la circunferencia, nos da el segmento buscado BE.



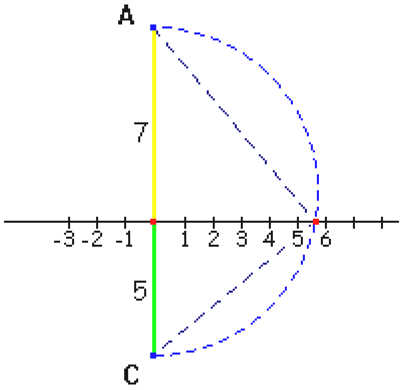
Ejemplo 2:

Representa gráficamente, utilizando el teorema de la altura, los siguientes números irracionales:

i. $\sqrt{35}$

Aplicaremos el teorema de la altura, pues como $35 = 7 \cdot 5$, se deduce que $\sqrt{35}$ es la altura de un triángulo rectángulo cuyos catetos se proyectan en la hipotenusa en segmentos de 7 cm y 5 cm)

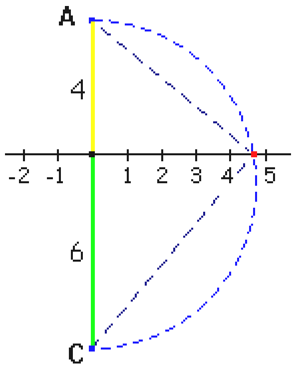
1. Levantamos en el eje OY (en sentido positivo) un segmento OA, de longitud 7cm.
2. Llevamos al eje OY (en sentido negativo) un segmento OC, de longitud 5cm.
3. Trazamos la circunferencia con diámetro el segmento AC, de longitud 12cm.
4. El punto donde dicha circunferencia corta al semieje positivo de las abscisas, es exactamente, la representación gráfica del número irracional $\sqrt{35}$.



ii. $\sqrt{24}$

Aplicaremos el teorema de la altura, pues como $24 = 6 \cdot 4$, se deduce que $\sqrt{24}$ es la altura de un triángulo rectángulo cuyos catetos se proyectan en la hipotenusa en segmentos de 6 cm y 4 cm)

1. Levantamos en el eje OY (en sentido positivo) un segmento OA, de longitud 4cm.
2. Llevamos al eje OY (en sentido negativo) un segmento OC, de longitud 6cm.
3. Trazamos la circunferencia con diámetro el segmento AC, de longitud 10cm.
4. El punto donde dicha circunferencia corta al semieje positivo de las abscisas, es exactamente, la representación gráfica del número irracional $\sqrt{24}$.

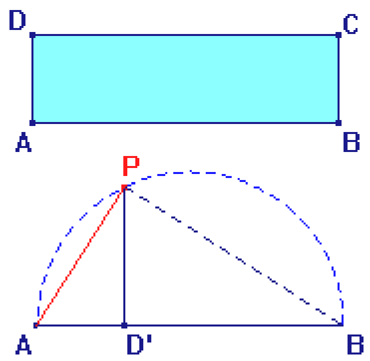


Aplicación del teorema del Cateto

Aplicación 1:

El teorema del cateto, nos permite construir un cuadrado del mismo área que un rectángulo dado ABCD:

Sea ABCD un rectángulo dado, de lados AB (lado mayor) y AD (lado menor):



1. Se traza un segmento AB igual al lado mayor del rectángulo.

2. Se traza una semicircunferencia que tenga al segmento AB por diámetro.

3. Se lleva sobre AB un segmento AD' de la misma longitud que el lado menor del rectángulo (AD'=AD)

4. Por D' se traza la perpendicular a AB, hasta que corte a la semicircunferencia en el punto P.

El segmento AP (cateto del triángulo APB) es el lado del cuadrado buscado, es decir, la lado del cuadrado que tiene el mismo área que el rectángulo ABCD, ya que por el teorema del cateto, se cumple que:

$$AP^2 = AD'\cdot AB = AD\cdot AB$$

Aplicación 2:

"Representación gráfica de una raíz cuadrada no exacta (número irracional)"

Ejemplo 1:

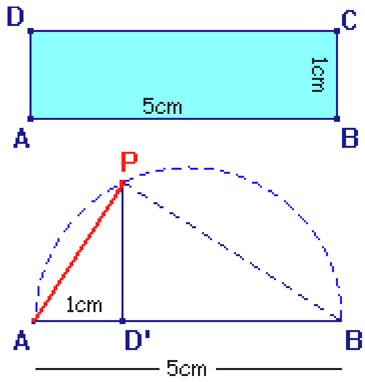
Construye gráficamente el lado del cuadrado que tiene el mismo área que los rectángulos de lados:

i. a=1cm b=5cm

$\text{Área} = 1\cdot 5 = 5$, luego el cuadrado tiene de lado $\sqrt{5}$.

Por aplicación del teorema del cateto, sabemos que dicho lado es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 5cm y cuya proyección sobre ésta es un segmento de longitud 1cm.

1. Se traza un segmento AB=5cm.
2. Se traza una semicircunferencia que tenga al segmento AB por diámetro.
3. Se lleva sobre AB un segmento AD'=1cm
4. Por D' se traza la perpendicular a AB, hasta que corte a la semicircunferencia en el punto P.
5. El segmento AP, es el lado del cuadrado buscado, cuya longitud será $\sqrt{5}$.

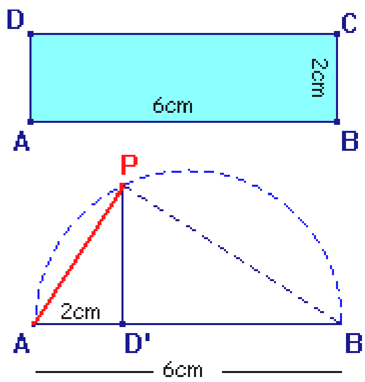


ii. a=2cm b=6cm

$\acute{A}rea = 2 \cdot 6 = 12$, luego el cuadrado tiene de lado $\sqrt{12}$.

Por aplicación del teorema del cateto, sabemos que dicho lado es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 6cm y cuya proyección sobre ésta es un segmento de longitud 2cm.

1. Se traza un segmento AB=6cm.
2. Se traza una semicircunferencia que tenga al segmento AB por diámetro.
3. Se lleva sobre AB un segmento AD'=2cm
4. Por D' se traza la perpendicular a AB, hasta que corte a la semicircunferencia en el punto P.
5. El segmento AP, es el lado del cuadrado buscado, cuya longitud será $\sqrt{12}$.



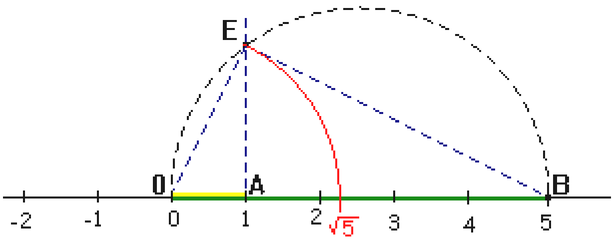
Ejemplo 2:

Representa gráficamente, utilizando el teorema del cateto, los siguientes números irracionales:

i. $\sqrt{5}$

Aplicaremos el teorema del cateto, pues como $1 \cdot 5 = 12$, se deduce que $\sqrt{5}$ es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 5cm y cuya proyección sobre ésta es un segmento de longitud 1cm.

1. Con origen en el origen de coordenadas, trazamos un segmento de 1cm de longitud, OA=1cm.
2. Con origen en el origen de coordenadas, trazamos un segmento de 5cm de longitud, OB=5cm.
3. Trazamos la semicircunferencia con diámetro el segmento OB, de longitud 5cm.
4. Trazamos la perpendicular al eje de abscisas por el punto A, hasta que corte a la semicircunferencia en el punto E.
5. Con origen en O, y radio OE, trazamos un arco de circunferencia hasta cortar al semieje positivo de las abscisas
6. El punto así obtenido es la representación gráfica en la recta real del número irracional $\sqrt{5}$.



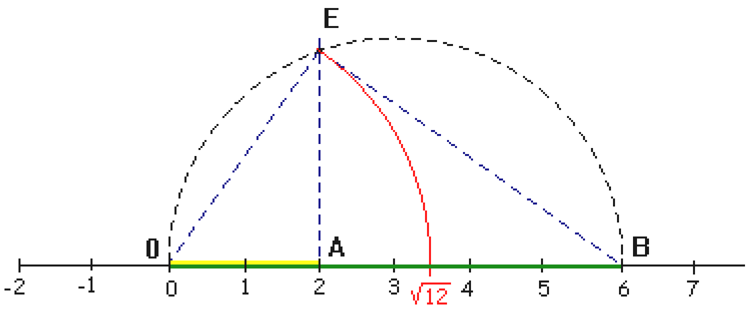
ii. $\sqrt{12}$

Aplicaremos el teorema del cateto, pues como $2 \cdot 6 = 12$, se deduce que $\sqrt{12}$ es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 6cm y cuya proyección sobre ésta es un segmento de longitud 2cm.

1. Con origen en el origen de coordenadas, trazamos un segmento de 1cm de longitud, OA=2cm.
2. Con origen en el origen de coordenadas, trazamos un segmento de 5cm de longitud, OB=6cm.
3. Trazamos la semicircunferencia con diámetro el segmento OB, de longitud 6cm.
4. Trazamos la perpendicular al eje de abscisas por el punto A, hasta que corte a la semicircunferencia en el punto E.
5. Con origen en O, y radio OE, trazamos un arco de circunferencia hasta

cortar al semieje positivo de las abscisas

6. El punto así obtenido es la representación gráfica en la recta real del número irracional $\sqrt{12}$.



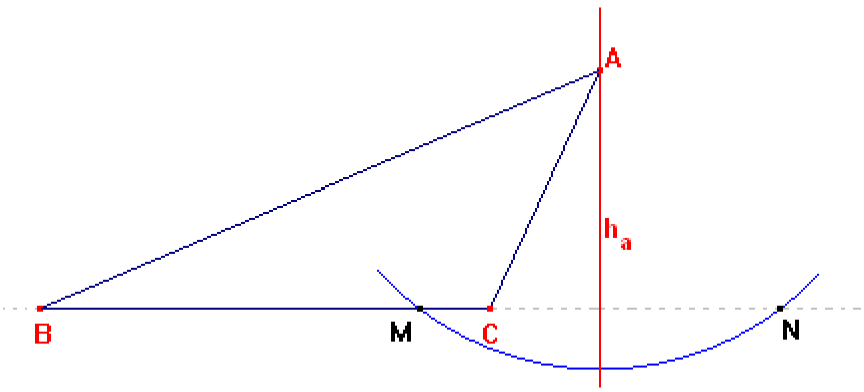
APENDICE:

Construcción de las alturas:

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA ALTURA "h_a"

Para trazar la altura respecto del lado "a"=BC de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice A.
2. Con origen en el vértice A, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte al lado BC (o su prolongación) en dos puntos que llamaremos N y M.
3. Trazas la mediatriz del segmento NM, y la prolongas hasta que corte o incida en el vértice A
4. La recta así obtenida es la altura que buscábamos.

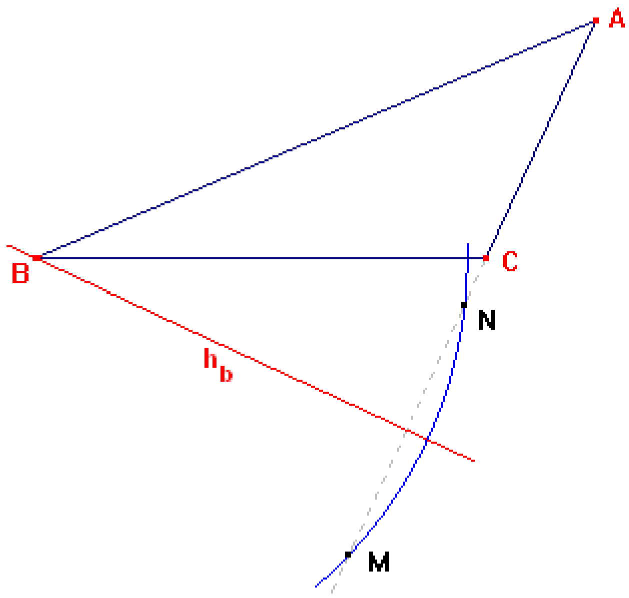


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA ALTURA "h_b"

Para trazar la altura respecto del lado "b"=AC de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice B.
2. Con origen en el vértice B, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte al lado AC (o su prolongación) en dos puntos que llamaremos N y M.
3. Trazas la mediatriz del segmento NM, y la prolongas hasta que corte o incida en el vértice B.
4. La recta así obtenida es la altura que buscábamos.

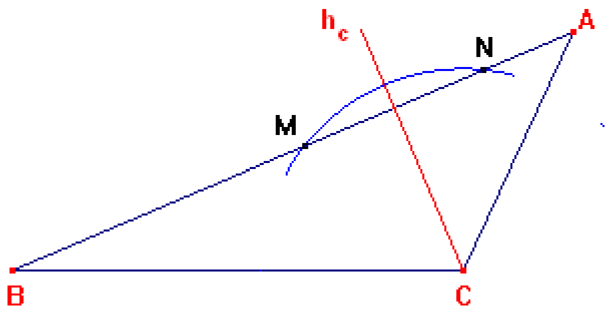


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA ALTURA "h_c"

Para trazar la altura respecto del lado "c"=AB de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice C.
2. Con origen en el vértice C, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte al lado AB (o su prolongación) en dos puntos que llamaremos N y M.
3. Trazas la mediatriz del segmento NM, y la prolongas hasta que corte o incida en el vértice C
4. La recta así obtenida es la altura que buscábamos.



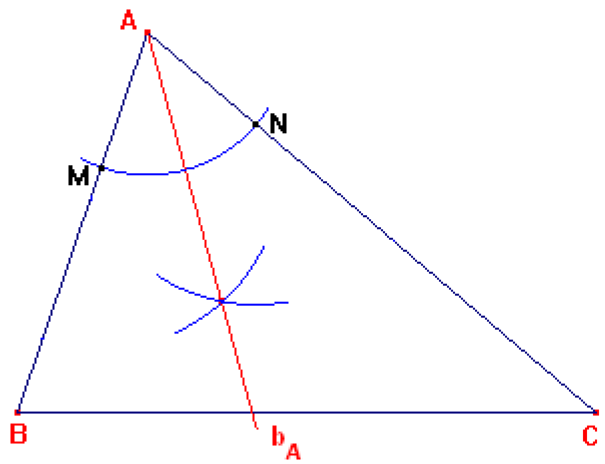
VOLVER

Construcción de las bisectrices:

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA BISECTRIZ "b_A"

Para trazar la bisectriz del ángulo A de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice A.
2. Con origen en el vértice A, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte los lados AB y AC en dos puntos que llamaremos N y M
3. Con origen en N, y radio cualquiera, traza un arco de circunferencia..
4. Con origen en M, y el mismo radio, traza otro arco de circunferencia que interseque con el anterior, en un punto.
5. Une este punto con el vértice A mediante una línea recta, y ya tienes la bisectriz del ángulo A.
6. Etiqueta con "b_A"



VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA BISECTRIZ "b_B"

Para trazar la bisectriz del ángulo A de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice B.

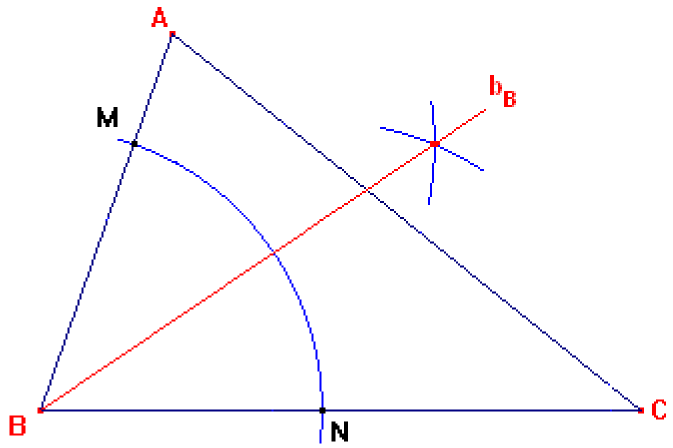
2. Con origen en el vértice B, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte los lados BA y BC en dos puntos que llamaremos N y M

3. Con origen en N, y radio cualquiera, traza un arco de circunferencia..

4. Con origen en M, y el mismo radio, traza otro arco de circunferencia que interseque con el anterior, en un punto.

5. Une este punto con el vértice B mediante una línea recta, y ya tienes la bisectriz del ánguloB..

6. Etiqueta con "b_B"



VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA BISECTRIZ "b_C"

Para trazar la bisectriz del ángulo A de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice C.

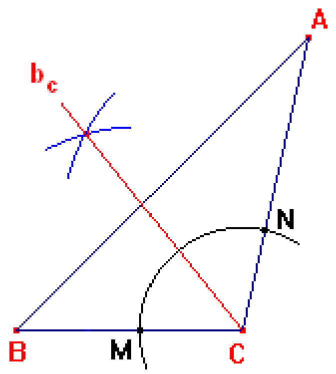
2. Con origen en el vértice C, trazas un arco de circunferencia de radio cualquiera pero tal que corte los lados CA y CB en dos puntos que llamaremos N y M

3. Con origen en N, y radio cualquiera, traza un arco de circunferencia..

4. Con origen en M, y el mismo radio, traza otro arco de circunferencia que interseque con el anterior, en un punto.

5. Une este punto con el vértice C mediante una línea recta, y ya tienes la bisectriz del ángulo C.

6. Etiqueta con "b_C"



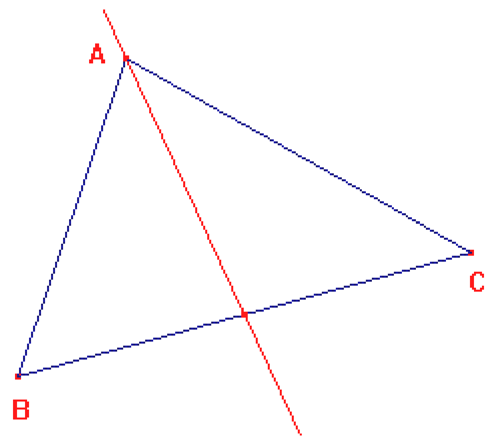
VOLVER

Construcción de las medianas:

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIANA "m_A"

Para trazar la mediana con respecto al vértice B, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice A
2. Calculas el punto medio del lado BC (lado opuesto al vértice A)
3. Trazas la recta que pasa por el vértice A y el punto medio del lado BC.
4. Le pones la etiqueta **m_A**, para indicar que se trata de la mediana correspondiente al vértice A.

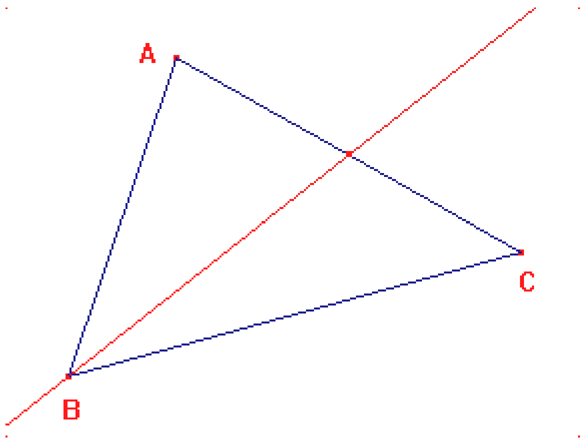


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIANA "m_B"

Para trazar la mediana con respecto al vértice B, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice B
2. Calculas el punto medio del lado AC (lado opuesto al vértice B)
3. Trazas la recta que pasa por el vértice B y el punto medio del lado AC.
4. Le pones la etiqueta, $\mathbf{m_B}$, para indicar que se trata de la mediana correspondiente al vértice B.

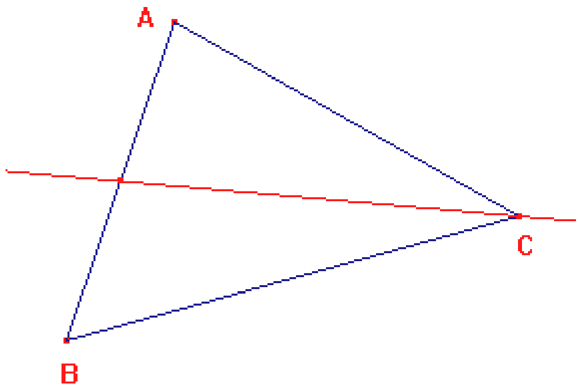


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIANA "m_C"

Para trazar la mediana con respecto al vértice C, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el vértice C
2. Calculas el punto medio del lado AB (lado opuesto al vértice C)
3. Trazas la recta que pasa por el vértice C y el punto medio del lado AB
4. Le pones la etiqueta, **m_C**, para indicar que se trata de la mediana correspondiente al vértice C.



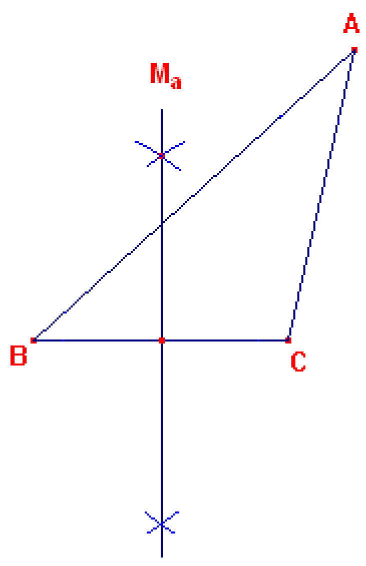
VOLVER

Construcción de las mediatrices:

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIATRIZ "M_a"

Para trazar la mediatriz del lado "a"=BC de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el lado "a" (segmento que une los vértices B y C del triángulo)
2. Con origen en el vértice B, y el radio que quieras, trazas dos arcos de circunferencia (uno a cada lado del lado BC)>
3. Con origen en el vértice C, y **el mismo radio**, trazas dos arcos de circunferencia hasta que se corten con los anteriores.
4. Trazas la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos que trazaste con origen en los vértices B y C.
5. Pones a la recta la etiqueta M_a para indicar que se trata de la mediatriz del lado "a" del triángulo.

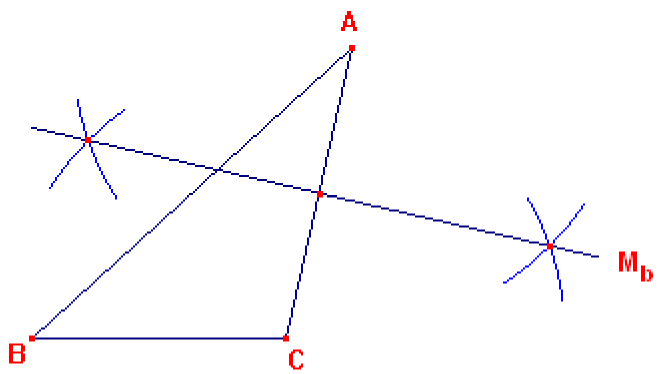


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIATRIZ "M_b"

Para trazar la mediatriz del lado "b"=AC de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el lado "b" (segmento que une los vértices A y C del triángulo)
2. Con origen en el vértice A, y el radio que quieras, trazas dos arcos de circunferencia (uno a cada lado del lado AC)
3. Con origen en el vértice C, y **el mismo radio**, trazas dos arcos de circunferencia hasta que se corten con los anteriores.
4. Trazas la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos que trazaste con origen en los vértices A y C.
5. Pones a la recta la etiqueta M_b para indicar que se trata de la mediatriz del lado "b" del triángulo.

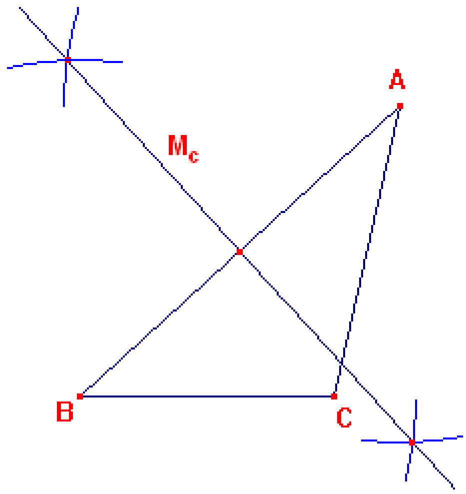


VOLVER

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MEDIATRIZ "M_c"

Para trazar la mediatriz del lado "b"=AC de un triángulo de vértices ABC, tienes que hacer lo siguiente:

1. Localizas el lado "c" (segmento que une los vértices A y B del triángulo)
2. Con origen en el vértice A, y el radio que quieras, trazas dos arcos de circunferencia (uno a cada lado del lado AC)
3. Con origen en el vértice B, y **el mismo radio**, trazas dos arcos de circunferencia hasta que se corten con los anteriores.
4. Trazas la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos que trazaste con origen en los vértices A y B.
5. Pones a la recta la etiqueta M_c para indicar que se trata de la mediatriz del lado "c" del triángulo.



VOLVER