# ANÁLISIS DE UN JUEGO DE CARTAS:

## LAS SIETE Y MEDIA

# MaMaEuSch
# (Management Mathematics for European School)

http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/

- Modelos matemáticos orientados a la educación
- Clases orientadas a la práctica
- Trabajo con problemas reales de la industria y la sociedad
- Formación de profesores
- Material para la formación disponible en tres idiomas

# ORDEN DE LA SESIÓN

- Las reglas del juego.
- Reglas de decisión. Qué son y cuál vamos a seguir.
- Razonamiento teórico del sistema de resolución del juego.
- Resolución de un caso particular.
- Aplicaciones de la probabilidad condicionada, el teorema de la probabilidad total y la regla de Bayes.
- Resultados de la experimentación en 20 partidas.
- Jugar alguna mano.
- Importancia de poder actuar así en un casino.

# EL JUEGO: LAS SIETE Y MEDIA

- Se juega con una baraja española.
- Cada carta tiene asociado un valor numérico.
- El juego consiste en ir pidiendo cartas hasta conseguir que la suma de puntos se acerque lo más posible a 7’5 sin pasarse. El que se pase pierde. En caso de empate, gana el jugador banca.
- Cada jugador puede mantener UNA de sus cartas cubierta, excepto la banca que tiene que descubrirlas todas según vayan saliendo.

# REGLAS DE DECISIÓN

- Una regla de decisión es la descripción de la forma de actuar que tendremos con cualesquiera cartas que se estén dando en la mano.
- Con una regla de decisión programada, un autómata (ordenador, robot,...) podría jugar a este juego.
- Una regla de decisión podría ser: “pido cartas hasta que la probabilidad de ganar sea superior a 0’8”.
- Si se pudiese utilizar una computadora en un casino se ganarían muchos millones jugando a un juego parecido a este, el Black Jack, pero eso está prohibido.

# REGLA DE DECISIÓN A USAR

$p_1$ = Probabilidad de ganar si me planto

$p_2$ = Probabilidad de pasarme si pido otra carta

$$f(p_1, p_2) = \begin{cases} S & \text{si } \{p_1 \geq 0'7\} \text{ ó } \{p_1 \in [0'1, 0'7) \text{ y } p_2 \geq 0'55\} \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Donde S = Stop (se planta)

C = Continuar (pide otra carta)

# Otra posible regla de decisión podría ser:

$$f(p_1, p_2) = \begin{cases} S & \text{si } p_1 > 1 - p_2 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Viene a decir que pararemos si nuestra probabilidad de ganar es superior a la probabilidad de no pasarse pidiendo otra carta.

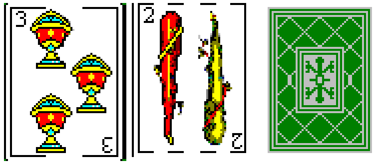
¿CUÁL ES MEJOR?

# Herramientas para resolver el juego

- Calcular las probabilidades $p_1$ y $p_2$ utilizando herramientas básicas de probabilidad y teniendo en cuenta:
  + Las cartas descubiertas de los oponentes
  + Las cartas cubiertas de los oponentes
- Elegir una regla de decisión óptima. Para ello se considerará:
  + El nivel de riesgo que queremos asumir
  + El nivel de riesgo que suponemos tienen nuestros oponentes

# Caso particular

- Juegan dos personas: nosotros (la banca) y un oponente.
- Vamos a actuar sabiendo las cartas del oponente.
- Estas cartas son




• Analizaremos el juego suponiendo que somos la banca y queremos superar o igualar la puntuación del adversario.

# ¿CUÁL ES LA CARTA DEL OPONENTE?

- Puede ser una de las 38 cartas que no conocemos aún.
- Sabemos que no se ha pasado de 7'5, por tanto la carta escondida tiene que ser una figura, un uno ó un dos.
- Como tenemos información adicional, utilizaremos la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

***¿CÓMO?***

# ¿CUÁL ES LA CARTA DEL OPONENTE? II

Consideraremos los siguientes sucesos aleatorios:

- B = "La carta X es un uno, un dos ó una figura"
- $A_1$ = "La carta X es un uno"
- $A_2$ = "La carta X es un dos"
- $A_3$ = "La carta X es una figura"

# Cálculo de esas probabilidades

$$P(B) = \frac{\text{nº de unos} \; + \; \text{nº de doses} \; + \; \text{nº de figuras}}{\text{nº de cartas en la baraja}} = \frac{4+3+12}{38} = \frac{19}{38}$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \underbrace{=}_{A_1 \subset B \Rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_1)} \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{38}}{\frac{19}{38}} = \frac{4}{19}$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{38}}{\frac{19}{38}} = \frac{3}{19}$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{38}}{\frac{19}{38}} = \frac{12}{19}$$

# Así, en principio tenemos que

- La probabilidad de que la carta X sea un uno es 4/19
- La probabilidad de que la carta X sea un dos es 3/19
- La probabilidad de que la carta X sea una figura es 12/19

# Una jugada particular

- Supongamos que la primera carta que me dan es un 6
- ¿Qué hacer? ¿Me planto? ¿Pido otra?
- Mi puntuación es 6. ¿Cuál es mi probabilidad de ganar si me planto? Es decir, hay que calcular $p_1$.
- Ganaremos si el contrincante tiene una puntuación menor o igual a 6, es decir, si su carta cubierta es una figura o un uno.

$$p_1 = p(X = figura \text{ ó } X = uno) \underbrace{=}_{\text{Intersección vacía}} P(X = figura) + P(X = uno) = 0'84$$

$p_1 > 0'7$, según nuestra regla de decisión nos plantamos

# Segunda jugada particular

- Me toca un cinco. No tengo ninguna posibilidad de ganar si me planto.
- ¿Cuáles son mis probabilidades de ganar pidiendo UNA carta?
- Para calcular esa probabilidad haremos uso del teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(S/A_n)$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \qquad\qquad A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$$

# Segunda jugada particular II

Consideraremos los siguientes sucesos aleatorios como sistema completo de sucesos:

- A = "Sacar una carta mayor o igual que tres"
- B = "Sacar un dos"
- C = "Sacar un uno"
- D = "Sacar una figura"

Estos sucesos cumplen las siguientes propiedades:

$$A \cap B = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \quad A \cap D = \emptyset \quad B \cap C = \emptyset \quad B \cap D = \emptyset \quad C \cap D = \emptyset$$

$$A \cup B \cup C \cup D = E$$

# Segunda jugada particular III

Por tanto, podemos aplicar la fórmula de la probabilidad total tomando como sistema completo de sucesos A, B, C y D

$$p_1 = P(Ganar) =$$

$$= P(Ganar/A)P(A) + P(Ganar/B)P(B) + P(Ganar/C)P(C) + P(Ganar/D)P(D)$$

Tenemos que calcular por separado las probabilidades que aparecen en la fórmula

# Segunda jugada particular IV

$P(Ganar/A) = 0$ Se pasaría de 7’5 y perdería

$P(Ganar/B) = 1$ Obtendría una puntuación de 7 y automáticamente gana

$P(Ganar/C) = \frac{15}{18} = 0'83$ Quedan 12 figuras, 3 unos y 3 doses

$P(Ganar/D) = \frac{11}{18} = 0'61$ Quedan 11 figuras, 4 unos y 3 doses

# Segunda jugada particular V

## P(B)

Para calcularla hay que tener en cuenta:

- La carta X es un dos (suceso $B_1$)
- La carta X no es un dos (suceso $B_1^c$)

Aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P(B) = P(B/B_1)P(B_1) + P(B/B_1^c)P(B_1^c) = \frac{2}{36}\frac{3}{19} + \frac{3}{36}\frac{16}{19} = \dots = 0'08$$

# Segunda jugada particular VI

P(C)

Para calcularla hay que tener en cuenta:

- La carta X es un uno (suceso $C_1$)
- La carta X no es un uno (suceso $C_1^c$)

Aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P(C) = P(C/C_1)P(C_1) + P(C/C_1^c)P(C_1^c) = \frac{3}{36}\frac{4}{19} + \frac{4}{36}\frac{15}{19} = \dots = 0'11$$

# Segunda jugada particular VII

P(D)

Para calcularla hay que tener en cuenta:

•La carta X es una figura (suceso $D_1$)

•La carta X no es una figura (suceso $D_1^c$)

Aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P(D) = P(D/D_1)P(D_1) + P(D/D_1^c)P(D_1^c) = \frac{11}{36}\frac{12}{19} + \frac{12}{36}\frac{7}{19} = \ldots = 0'32$$

# Segunda jugada particular VIII

Nota: Como P(Ganar/A) = 0, no necesitamos calcular P(A)

$$p_1 = P(Ganar) =$$

$$= P(Ganar/A)P(A) + P(Ganar/B)P(B) + P(Ganar/C)P(C) + P(Ganar/D)P(D)$$

Sustituyendo los valores calculados, nos queda

$$= 0 \cdot P(A) + 1 \cdot 0'08 + 0'83 \cdot 0'11 + 0'61 \cdot 0'32 = \ldots = 0'37$$

# Segunda jugada particular IX

RESUMEN:

SI LA PRIMERA CARTA FUE UN CINCO, NUESTRA PROBABILIDAD DE GANAR PIDIENDO UNA SOLA CARTA ES 0’37

# JUGUEMOS

- La primera carta es un tres. Nuestra probabilidad de ganar es cero, pues el rival tiene al menos 5’5 puntos. Es decir $p_1 = 0$. Por tanto, nuestra regla de decisión nos dice que tenemos que pedir otra carta.
- La segunda carta es una figura. Ahora nuestra puntuación es 3’5. $p_1 = 0$ otra vez, por tanto pedimos otra carta.
- Nuestra tercera carta vuelve a ser una figura. Tenemos 4 puntos. Nuestra probabilidad de ganar vuelve a ser cero y pedimos otra carta.
- La cuarta carta que nos toca es un uno. Nuestra puntuación asciende a cinco, pero aún así no tenemos ninguna posibilidad de ganar. Pedimos otra carta.
- La quinta carta es una figura. La puntuación es 5’5. Veamos que hacemos ahora.

# JUGUEMOS II

Calculemos $p_1$ y $p_2$

$$p_1 = P(X = \text{figura}) = \frac{9}{15} = 0'6 < 0'7$$

$$p_2 = P(Y \geq 3) = \frac{2+4+4+4+4}{32} = 0'56 > 0'55$$

Entonces, como $p_1$ está entre 0’1 y 0’7 y $p_2 > 0’55$, nuestra regla de decisión nos dice que tenemos que plantarnos. Nos plantamos.

# Otra jugada

- La primera carta que nos dan es una figura. Nuestra probabilidad de ganar es cero, por lo que pedimos otra.
- Después nos toca un tres. Tampoco tenemos posibilidades de ganar y pedimos otra carta.
- La siguiente carta es un dos. Ahora la puntuación es 5’5 y si tendríamos alguna posibilidad de ganar, ¿cuánto? Veamoslo:

$$p_1 = P(X = \text{figura}) = \frac{11}{17} = 0'65$$

$$p_2 = P(Y \geq 3) = \frac{2+4+4+4+4}{34} = 0'53 < 0'55$$

# Otra jugada II

- Según nuestra regla de decisión, tenemos que pedir otra carta.
- Supongamos que nos sale otra figura. Nuestra puntuación sería 6. Veamos que hacer según nuestra regla de decisión.

$$p_1 = P(X = \text{figura ó } X = \text{uno}) = \frac{10+4}{16} = 0'875 > 0'7$$

Según nuestra regla de decisión, nos plantamos.

# Teorema de Bayes

- Supongamos que hemos sacado diez figuras y un uno. Puntuación 5’5. ¿Qué hacemos? Lo primero es calcular $p_1$.

$$p_1 = P(X = \text{figura ó } X = \text{uno}) = \frac{2+3}{8} = 0'625 \in (0'1, 0'7]$$

Cómo $p_1$ no es mayor que 0’7 tenemos que calcular $p_2$.

$$p_2 = P(Y \geq 2)$$

Para calcular esa probabilidad tenemos que tener en cuenta si la carta X es o no un dos.

# Teorema de Bayes II

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$p_2 = P(Y \geq 2) = P(Y \geq 2/X = 2)P(X = 2) + P(Y \geq 2/X \neq 2)P(X \neq 2)$$

Haciendo cálculos resulta:

$$P(Y \geq 2/X = 2) = \frac{2+3+4+4+4+4}{26} = 0'81$$

$$P(Y \geq 2/X \neq 2) = \frac{3+3+4+4+4+4}{26} = 0'85$$

Para calcular P(X = 2) aplicaremos el teorema de Bayes

# Teorema de Bayes III

- Sabemos que hemos sacado 10 figuras y un uno.
- Llamemos ***S*** a ese suceso.
- Queremos calcular P(X = 2 / S)
- El teorema de Bayes dice:

$$P(A_i/S) = \frac{P(A_i \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=i}^{n} P(S/A_i) \cdot P(A_i)}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \qquad\qquad A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$$

# Teorema de Bayes IV

Consideremos los siguientes sucesos aleatorios:

- $A_1$ = "X = 1"
- $A_2$ = "X = 2"
- $A_3$ = "X = F"
- Forman un sistema completo de sucesos, por lo que aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A_2/S) = \frac{P(S/A_2)P(A_2)}{P(S/A_1)P(A_1) + P(S/A_2)P(A_2) + P(S/A_3)P(A_3)}$$

# TEOREMA DE BAYES V

$$P(A_2/S) = \frac{P(S/A_2)P(A_2)}{P(S/A_1)P(A_1) + P(S/A_2)P(A_2) + P(S/A_3)P(A_3)}$$

Esas probabilidades son:

$$P(S/A_2)P(A_2) = (11 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4}{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}) \cdot \frac{3}{19}$$

$$P(S/A_1)P(A_1) = (11 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}) \cdot \frac{4}{19}$$

$$P(S/A_3)P(A_3) = (11 \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}) \cdot \frac{12}{19}$$

Y haciendo cálculos resulta: $P(A_2 / S) = 3/8$

# TEOREMA DE BAYES VII

Haciendo cálculos por la "cuenta de la vieja" resultaría:

$$P(X=2) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de doses en la baraja}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ figuras} + \text{n}^{\text{o}} \text{ unos} + \text{n}^{\text{o}} \text{ doses}} = \frac{3}{2+3+3} = \frac{3}{8}$$

Lógicamente sale el mismo resultado.

# Realización de 20 partidas

- 2,3,1 --- 1,4,3: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- F,7: Ganamos
- 2,3,1 --- 4,2: Ganamos
- 2,3,1 --- 7: Ganamos
- 2,3,2 --- F,F,2,3: Ganamos
- 2,3,2 --- F,1,7: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- 4,5: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- 5,2: Ganamos
- 2,3,F --- 7: Ganamos
- 2,3,F --- F,4,2: Ganamos

# Realización de 20 partidas II

- 2,3,1 --- 7: Ganamos
- 2,3,F --- 5,F,7: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- 1,F,F,4: Ganamos
- 2,3,1 --- 1,4,3: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- F,2,F,F,6: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- F,5,F: Ganamos
- 2,3,2 --- 3,F,F,4: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- 6: Ganamos
- 2,3,F --- 1,F,F,6: Nos pasamos y perdemos
- 2,3,F --- 4,4: Nos pasamos y perdemos

# Realización de 20 partidas III: Consecuencias

- La tercera carta del jugador oponente ha sido en 12 ocasiones figura, en 5 un uno y en 3 un tres. Es decir, han aparecido con probabilidades (0’6 , 0’25 , 0’15), muy cercanas a (0’63 , 0’21 , 0’16), sus probabilidades reales.
- Exactamente ganamos en diez de las partidas y perdimos en otras diez, todas ellas por pasarnos de siete y media.

# CASINOS

Hay un juego parecido a las siete y media muy popular en los casinos, el Black Jack. Consiste en pedir cartas para acercarse a 21 sin pasarse. Éste juego mueve mucho dinero y, si encontráramos una buena regla de decisión y pudiéramos aplicarla (sólo necesitamos realizar los cálculos) en el casino, podríamos ganar mucho dinero. Desgraciadamente para nosotros está prohibido actuar con una máquina, apuntar las jugadas en papel,...en los casinos.