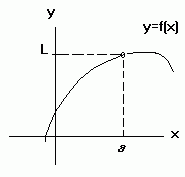
**LIMITES DE FUNCIONES**

**función en un punto.**

En realidad, una función  *y* = *f(x)* puede llegar a mostrar un comportamiento extraño en cierto punto *x = x*o . Para comprender mejor estas posibles anomalías de algunas funciones se introduce la noción de límite de una función en un punto.



|  |
| --- |
| La función  *y = f(x)*tiene como límite L en el punto *x=*a. |

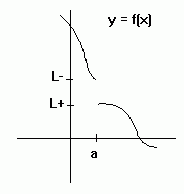
 Para determinar el límite de *y* = *f(x)* en cierto punto *x =*a ,  debemos prescindir del valor que tenga *f*(a), incluso puede que *f*(a) ni siquiera esté definido, y fijarnos en los valores de *f*(a) para puntos extremadamente cercanos a *x =*a.

   En el ejemplo del gráfico, observando los valores de los puntos muy próximos a *x=*a*,*lo cual será expresado así:  http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/tiende1.gif,  se llega a la conclusión que el límite de *y*= *f(x)* "cuando x tiende al valor *a*" es L. Utilizando simbología matemática, lo expresamos:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit0.gif

**Limites laterales.**

  Existen funciones que en un cierto punto *x = x*o  poseen una *discontinuidad*, sufriendo su gráfica de un "*salto*", tal como se muestra en la figura de abajo.



 Para la función   *y = f(x)*del gráfico de arriba, no está definido el valor *f*(a*)* ,  y se dice que el límite de *f(x)*"por la derecha" del punto *x*= a  (expresado así:  http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/tiende1.gif+) es  L+, lo cual en simbología matemática es:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limitd1.gif

 Por otra parte, se dice que el límite de *f(x)*"por la izquierda" del punto *x*= a  ( expresado así:  http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/tiende1.gif-) es  L+, que en simbología matemática es:

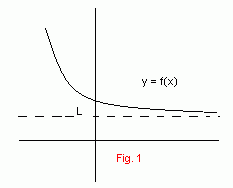
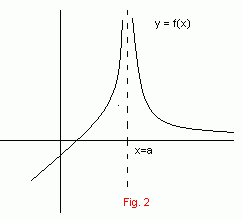
http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limiti1.gif

   Por otra parte, para que podamos hablar verdaderamente del límite de *f(x)*en el punto *x*= a  los los límites laterales deben ser iguales, es decir, debe cumplirse:

limitl5.gif (315 bytes)

**Limites infinitos.**

 Hay dos casos destacables de límites, tal como podemos verlo en las gráficas de abajo

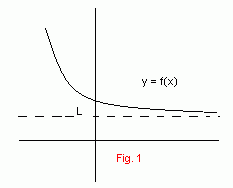
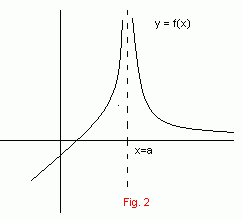
  Para la función *y = f(x)*de la Fig. 1,  *f(*x) tiende al valor L para *x* en el infinito (geométricamente se habla de que *y =*L es una "asíntota horizontal" de la curva).  
  En el caso de la Fig. 2, es la función *y = f(x)*la que toma un valor infinito en el punto *x*=a (geométricamente *x*=a es una "asíntota vertical" de la curva).

    En el primer caso se expresa:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit1.gif

  Mientras que el segundo así:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit2.gif

  Para la función *y = f(x)*de la Fig. 1,  *f(*x) tiende al valor L para *x* en el infinito (geométricamente se habla de que *y =*L es una "asíntota horizontal" de la curva).  
  En el caso de la Fig. 2, es la función *y = f(x)*la que toma un valor infinito en el punto *x*=a (geométricamente *x*=a es una "asíntota vertical" de la curva).

    En el primer caso se expresa:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit1.gif

  Mientras que el segundo así:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit2.gif

**Algunas propiedades sobre el infinito y valores *indeterminados*.**

   Cuando se opera con límites de funciones se trabaja con el conjunto R ampliado, es decir, el conjunto de los números reales al que se le han añadido los entes numéricos: +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif, -http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif. Conviene, por tanto, tener claras algunas propiedades de estos entes, así como valores que son *indeterminados*en este conjunto:

  \*  Para cualquier número *n*(incluido el 0):  *n/*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif= 0.

  \*  Para cualquier número *n positivo*(distinto de 0):  *n .+*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif= +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif,   *n .*(*-*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif)= -http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif.

  \*  Para cualquier número *n negativo*(distinto de 0):  *n .+*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif= -http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif,   *n .*(*-*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif)= +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif.

  \*  Para el caso del 0:    0 . +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif  y   0 . (-http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif)  son Indeterminados.

   \*  Para números *n*positivos *+*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif/*n* = +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif, pero para *n* negativos *+*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif/*n* = -http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif.

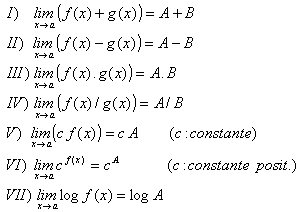
   \*  Para el caso del 0:   +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif/0  =  http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif,  así como *-*http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif/0 = http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif

**Propiedades de límites.**

Sea dos funciones f(x), g(x)  tales que en cierto punto x = a,  sus límites respectivos son A y B, es decir:

limitp1.gif (364 bytes)

entonces se tiene que:



pero siempre debemos desacartar las expresiones indeterminadas como las anteriormente citadas.

**Cálculo de límites.**

  Sea una  función *y = f(x)*,  si queremos hallar el límite de esa función en un determinado punto *x = a*, lo primero que haremos será hallar *f(a),*ante lo cual pueden suceder tres casos.

   I)  *f(a)*tiene un valor claro y unívoco.   
   II)  No podemos hallar *f(a)*, bien porque  *f(x)*no tiene imagen en el punto *x = a*, o porque nos da un valor *indeterminado*.   
   III)  *f(a)*nos da un valor infinito.

  Para el primer caso, podemos decir que ese mismo valor de *f*(*a*) es el propio valor del límite. Esto sucede en las regiones continuas de *y = f(x) .*Por ejemplo:

  Ejemplo 1: Hallar el límite en el punto *x =*2 de la función  *y = x² +*1 .

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limit3.gif

 Este límite es 5, puesto que de una manera clara tenemos  *f(*2*)*= 5.

  Ejemplo 2: Hallar el límite en el punto *x =*1 de la función :

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/fracc1.gif

 Al cancelar el factor (*x*-1) en el numerador y denominador hemos conseguido eliminar la indeterminación. Numerosas indeterminaciones nos aparecen cuando hallamos límites en el infinito, como en los próximos ejemplos.

  Ejemplo 3: Hallar el siguiente límite en el infinito:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/lraiz1.gif

 En principio si sustituimos *x* por +http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif, nos encontramos con la indeterminación http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif-http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/infinito.gif, en estos casos suele funcionar multiplicar y dividir por la misma expresión pero con el signo positivo, es decir:



  Ejemplo 4: Hallar el siguiente límite en el infinito:

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/images/limitb0.gif