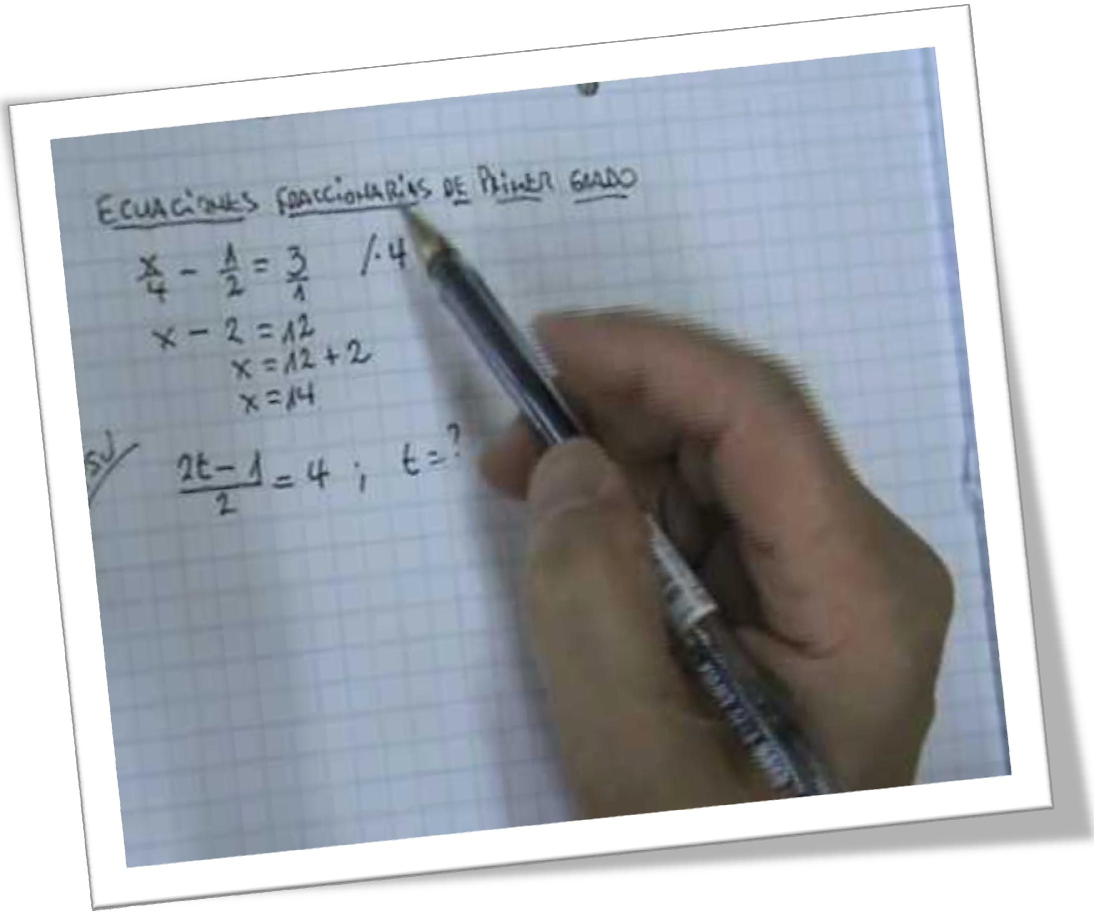
Matemática	ECUACIONES	Unidad N° 4



OBJETIVOS

- Identificar la naturaleza de las ecuaciones y sus correspondientes soluciones.
- Resolver de manera eficiente y eficaz una ecuación que corresponda a las incluidas en este texto.
- Adquirir habilidad para plantear ecuaciones que permitan resolver un problema.
- Determinar si los valores encontrados son soluciones válidas para el problema.
- Interpretar correctamente las soluciones encontradas.

CONCEPTOS PREVIOS

- Conjuntos Numéricos, operaciones y propiedades
- Expresiones algebraicas: Operaciones , Factoreo y simplificación

INTRODUCCIÓN

En casi todas las ramas de la Matemática las ecuaciones aparecen como protagonistas centrales pues ellas permiten describir en forma exacta y sencilla la situación problemática o el fenómeno del que se esté hablando.

En esta Unidad nos limitaremos a rever todos los tipos de ecuaciones y los métodos de resolución vistos en la escuela secundaria, preparándolos para poder enfrentar los temas

de mayor complejidad en los que aparecerán otros tipos de ecuaciones definidos en nuevos conjuntos. Un ejemplo de ello son las ecuaciones matriciales, las que no se podrían resolver sino se manejan las ecuaciones sencillas y los métodos más simples de cálculo.

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad donde figuran una o más incógnitas.

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de las incógnitas que verifican la igualdad. A dichos valores se les llama raíces o soluciones de la ecuación

Ejemplos:

a) La ecuación $2x+8=0$ tiene una única solución, x = -4

b) La ecuación $x^2+x-6=0$ tiene dos soluciones , 2 y -3

c) -2 es solución de $\frac{x^2-4}{x-2}=0$

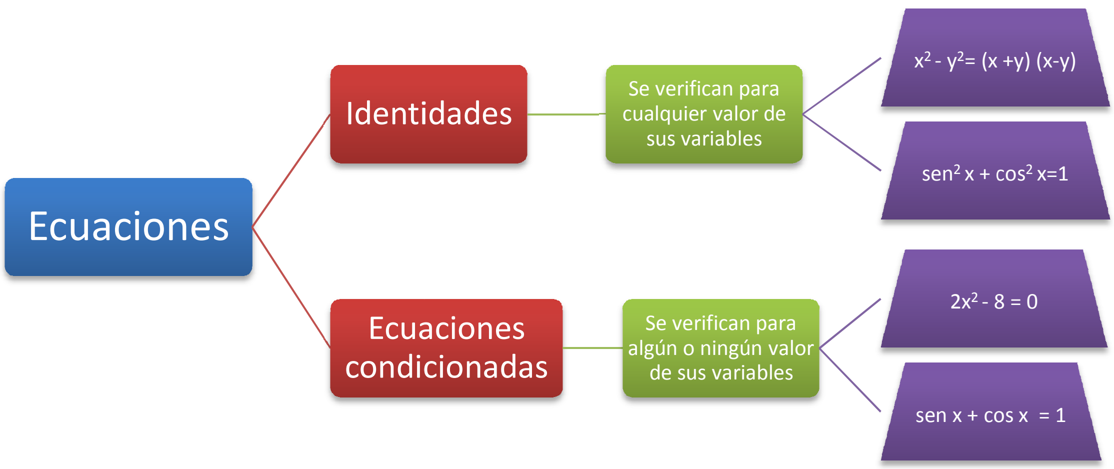
d) $x^2+4=0$ no tiene soluciones reales, sus soluciones son imaginarias, $2j$ y $-2j$

e) Ningún valor de x satisface la ecuación $sen\,x=2$, entonces decimos que no tiene solución

f) La ecuación $5x-3x+1=2x+1$ se satisface para cualquier valor de x

Clasificación de las ecuaciones de acuerdo a las soluciones

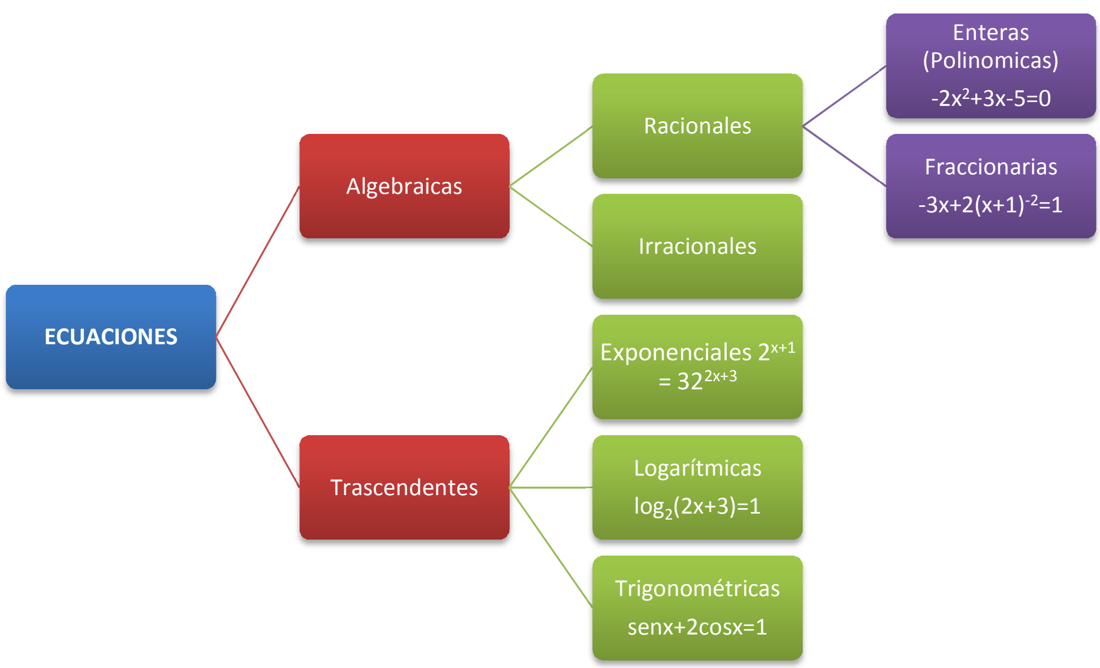
De acuerdo a las soluciones las ecuaciones se clasifican en:



Clasificación de las ecuaciones de acuerdo a las expresiones

El siguiente cuadro representa la clasificación de las ecuaciones, correspondiéndose exactamente con la clasificación de las expresiones.

A su vez se dan ejemplos de las que se verá en este curso.



ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una ecuación algebraica es una igualdad entre expresiones algebraicas en la que intervienen una o varias incógnitas.

Los miembros de una ecuación son las expresiones que están a ambos lados del signo igual. Así, se llama **primer miembro** al de la izquierda, y **segundo miembro** al de la derecha.

Ejemplo:

$$\underbrace{5y - 6}_{\text{Primer Miembro}} = \underbrace{3y + 8}_{\text{Segundo Miembro}}$$

No deben confundirse los miembros de una ecuación
Con los términos de la misma.

1° término del 1° miembro

2° término del 1° miembro

$$5y - 6 = 3y + 8$$

2° término del 2° miembro

1° término del 2° miembro

Verificación de las soluciones

Un valor es solución si verifica a la ecuación. Esto es, si se sustituyen las soluciones en lugar de la/s incógnitas, convierten a la ecuación en identidad.

Ejemplos:

a) La raíz de $2x+8=0$ es $x=-4$ pues $2(-4)+8=-8+8=0$

b) 2 es raíz de $x^2+x-6=0$ pues $2^2+2-6=4+2-6=0$ y -3 también debido a que $(-3)^2+(-3)-6=9-3-6=0$

c) -2 es solución de $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$ pues se tiene que $\dfrac{(-2)^2-4}{-2-2}=\dfrac{0}{-4}=0$

d) $2j$ es solución de $x^2+4=0$ ya que $(2j)^2+4=-4+4=0$ y también $-2j$ puesto que $(-2j)^2+4=-4+4=0$

Resolución de una ecuación

Se llama así al proceso de hallar la/las solución/es de una ecuación.

Para resolverla se transforma la ecuación dada, aplicando **propiedades**, en una **ecuación equivalente** de la forma ***x* = K**, cuya solución es inmediata.

La **ecuación equivalente** tiene las **mismas** soluciones que la **ecuación original**.

Propiedades que se aplican en la resolución de una ecuación

1) Propiedad simétrica: Los miembros de una igualdad pueden conmutarse entre sí

Esto es: Si a = b entonces b = a

Se aplica esta propiedad para que la incógnita aparezca en el 1º miembro de la ecuación.

Ejemplo: Si $-3 = 2 - 5y \Rightarrow 2 - 5y = -3$

2) Propiedad uniforme para la suma: Si se suma una constante, positiva o negativa, a ambos miembros de una igualdad, la misma se mantiene.

Esto es: Si a = b entonces a + c = b + c

Se usa cuando se quiere eliminar un término de un miembro de la ecuación, posteriormente se aplica el axioma de los elementos opuestos

Ejemplo: Si $2x + 3 = -1 \Rightarrow 2x + 3 - 3 = -1 - 3 \Rightarrow 2x = -4$

3) Propiedad cancelativa para la suma: Si una constante, positiva o negativa, está sumando en ambos miembros de una igualdad, puede cancelarse

Esto es: Si a + c = b + c entonces a = b

Ejemplo: Si $-x + 3 = 2x + 3 \Rightarrow -x + \cancel{3} = 2x + \cancel{3} \Rightarrow -x = 2x$

4) Propiedad uniforme para el producto: Si se multiplica una constante no nula, positiva o negativa, a ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

Esto es: Si a = b y c ≠ 0 entonces a . c = b . c

Se usa cuando se quiere eliminar un factor de un miembro de la ecuación, posteriormente se aplica el axioma de los elementos recíprocos

Ejemplo: Si $\frac{1}{2}x=-5 \Rightarrow \frac{1}{2}x.2=-5.2 \Rightarrow x=-10$

5) Propiedad cancelativa para el producto: Si una constante no nula, positiva o negativa, está multiplicando en ambos miembros de una igualdad, puede cancelarse

Esto es: **Si a . c = b . c con c ≠ 0** **entonces** **a = b**

Ejemplo: $2x = 2(3x-2) \Rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}(3x-2) \Rightarrow x = 3x-2$

- **Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o se les extrae una misma raíz, siempre que esté definida, la igualdad subsiste.**

Se aplica cuando se quiera eliminar una potencia o un radical de algún miembro de una ecuación

Ejemplo: Si $\sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow x=8$

Ejemplo: Si $\sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow x=8$

En la escuela secundaria seguramente aplicabas un método abreviado para resolver ecuaciones. En esa oportunidad decías "pasar al otro miembro". En realidad este modo a veces conduce a:

Ejemplo: Resolver la ecuación $5+\frac{x}{3} = 4$ por los dos métodos y compara

Método Abreviado	**Método por propiedades**
Se pasa el número 3 al 2º miembro: $5+x = 4.3 = 12$ Pasando “5” al 2º miembro: $x = 12-5$, entonces $x = 7$ **INCORRECTO**	Se multiplican ambos miembros por 3. $\left(5+\frac{x}{3}\right).3 = 4.3$, entonces $15+x = 12$ **Restando “15” en ambos miembros:** $15+x-15 = 12-15$. Luego, $x = -3$ **CORRECTO**

ECUACIÓN POLINOMICA DE PRIMER GRADO O ECUACIÓN LINEAL

Una ecuación lineal real en una variable es una ecuación de la forma:

$$ax+b=0$$

donde a y b, coeficientes de la ecuación, son números reales y x es la variable.

Toda ecuación real de primer grado en una incógnita tiene exactamente una raíz real

Ejemplo:

$-2x+3=0$ es una ecuación real de primer grado y su única raíz es $\frac{3}{2}$

$x(3+4)=0$ es una ecuación lineal y su única raíz es 0

ECUACION LINEAL EN DOS INCÓGNITAS

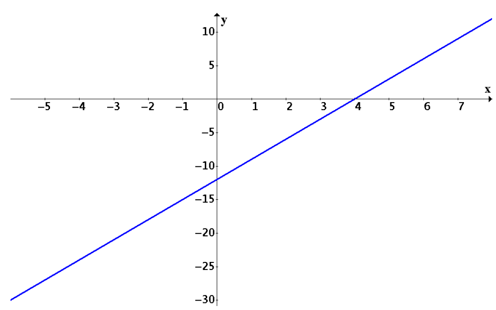
A una ecuación lineal en una variable $ax+b=0$ le podemos asociar una ecuación lineal en dos variables $y = ax + b$. Dicha ecuación representa geométricamente una recta en el plano.

Si hacemos $y=0$ en esa ecuación se obtiene la ecuación en 1º grado en una variable $ax+b=0$. Entonces la raíz de la ecuación $ax+b=0$ representa la abscisa del punto donde la recta $y = ax + b$ intercepta al eje X

Ejemplo:

La ecuación $3x-12=0$ tiene por raíz $x=4$

La gráfica de la ecuación $y=3x-12$ intercepta el eje X en (4, 0).



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES Ó DE PRIMER GRADO

Ejemplo1: Resolver la siguiente ecuación

$$30x-(-x+6)+(-5x+4) = -(5x+6)+(-8+3x)$$

Se separan los términos, en ambos miembros, y se efectúan las operaciones indicadas.

$$30x+x-6-5x+4 = -5x-6-8+3x$$

Si corresponde, aplicamos la propiedad cancelativa

$$30x+x-6-5x+4 = -5x-6-8+3x$$

$$31x+4 = -8+3x$$

Aplicando propiedades, se agrupan en un miembro todos los términos que contengan a la incógnita

$$31x+4-4-3x = -8+3x-4-3x$$

y en el otro miembro todas las cantidades conocidas y se cancela

$$31x + \cancel{4} - \cancel{4} - 3x = -8 + \cancel{3}x - 4 - \cancel{3}x$$

En cada miembro, se agrupan los términos semejantes $31x - 3x = -8 - 4$

Y se resuelven las operaciones indicadas $28x = -12$

Si la incógnita está afectada por un coeficiente se aplica la propiedad uniforme del producto pues ella permite multiplicar ambos miembros por el coeficiente de x para luego cancelar.

$$\frac{1}{28}\,28x = \frac{1}{28}(-12)$$

De ese modo queda despejada la incógnita. $x = -\frac{3}{7}$

Ejemplo 2: Encontrar el valor de x tal que $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$

$$\frac{4(x-2)-3(x-3)}{12} = \frac{x-4}{5}$$

Se efectúa la diferencia del 1º miembro

$$\frac{4x-8-3x+9}{12} = \frac{x-4}{5}$$

$$\frac{x+1}{12} = \frac{x-4}{5}$$

e aplica la propiedad uniforme del producto con el fin de eliminar los denominadores

$$5\times 12\times\frac{x+1}{12} = \frac{x-4}{5}\times 5\times 12$$

$$5(x+1)=12(x-4)$$

Se realizan las operaciones necesarias en cada miembro para simplificar y/o eliminar paréntesis

$$5x+5=12x-48$$

Se aplica la propiedad uniforme tantas veces como sea necesario con el fin de agrupar los términos semejantes.

$$5x-12x=-48-5$$

Se reducen los términos semejantes y, si corresponde, se aplica la propiedad uniforme del producto.

$$-7x=-53-7x=-53$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)\times x=\left(-\frac{1}{7}\right)\times(-53)$$

Éste es un procedimiento general con el que siempre se llega a la solución.

$$x=\frac{53}{7}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE PRIMER GRADO*

"Plantear una ecuación significa expresar en símbolos matemáticos una condición formulada con palabras; es una traducción de un lenguaje corriente al lenguaje de las fórmulas matemáticas. Las dificultades que podamos tener al plantear ecuaciones son dificultades de traducción. En primer lugar, hemos de comprender totalmente la condición. En segundo lugar, hemos de estar familiarizados con las formas de expresión matemática." ***George Polya***

¿Cómo expresar lenguaje Matemático consignas dadas en lenguaje Coloquial?

LENGUAJE COLOQUIAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Un número	x
Dos números	x, y
Números consecutivos	x, x+1, x+2, …
El duplo (doble) de un número	2x
El triplo de un número	3x
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La cuarta parte de un número	$\frac{x}{4}$
Un número par	2x
Pares consecutivos	2x, 2x+2, 2x+4,…
Un número impar	2x+1
Impares consecutivos	2x+1, 2x+3, 2x+5,…
El opuesto de un número x	-x
El inverso de un número	$\frac{1}{x}$
Un número de dos cifras xy	x.y = 10 x + y

Ejemplo

Si *x* es la edad en años de María hoy, entonces:

"la edad de María hace 2 años"

se expresa: $\mathbf{x - 2}$

"la edad de María dentro de 5 años"

se expresa: $\mathbf{x + 5}$

"el doble de la edad de **María** hoy"

se expresa: $\mathbf{2x}$

"el triple de la edad que **María** tendrá dentro de 4 años"

se expresa: $\mathbf{3\,(x + 4)}$

"la mitad de la edad que tenía **María** hace 6 años"

se expresa: $\dfrac{x-6}{2}$

APLICACIONES

1) La suma de las edades de Tomás y Andrés es 40 años. Si Andrés tiene 4 años más que Tomás. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Respuesta:

x : Edad de Tomas, $x+4$: Edad de Andrés

La suma de las edades es 40: $x+(x+4)=40$

Entonces $x+x+4=40$

$$2x=36 \quad \Rightarrow \quad x=18$$

La respuesta es Tomás tiene 18 años y Andrés 22 años

2) La suma de tres números enteros consecutivos es 156. Hallar los números.

Respuesta:

Los números se expresan en la forma x , $x+1$, $x+2$

La suma entre ellos es 156, por lo tanto la ecuación correspondiente es:

$$x+x+1+x+2=156$$

Entonces $3x+3=156 \quad \Rightarrow \quad x=51$

Los números son: 51 , 52 y 53

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Se denomina así a la consideración simultánea de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad donde \quad a_i, b_i, c_i \in R \quad , \quad x, y \quad incógnitas$$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Resolver un sistema de ecuaciones lineales significa encontrar, si existen, el o los puntos en común que posean las rectas que intervienen en el sistema. Llamamos **conjunto solución** al conjunto de pares ordenados que verifican a todas las ecuaciones a la vez. Un sistema de Ecuaciones Lineales puede tener:

- **Solución única**: el sistema de llama **Compatible Determinado.** El conjunto solución está formado por un único par de valores. Las rectas se **interceptan** en un punto (Figura a)
- **Infinitas soluciones**: el sistema se llama **Compatible Indeterminado.** El conjunto solución está formado por infinitos pares. Las rectas son **coincidentes**, tienen infinitos puntos en común. (Figura b)
- **Sin solución**: el sistema se llama **Incompatible.** El conjunto solución es vacio. Las rectas son **paralelas.** (Figura c)

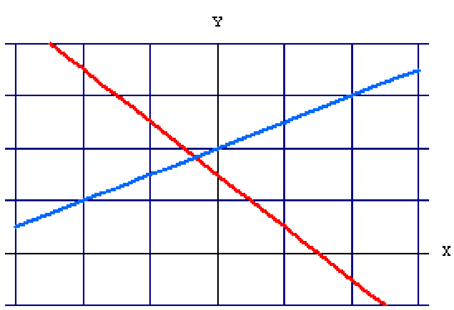


Figura a

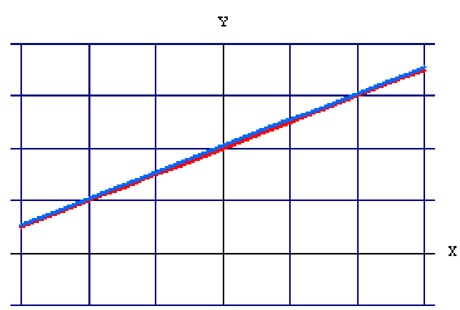


Figura b

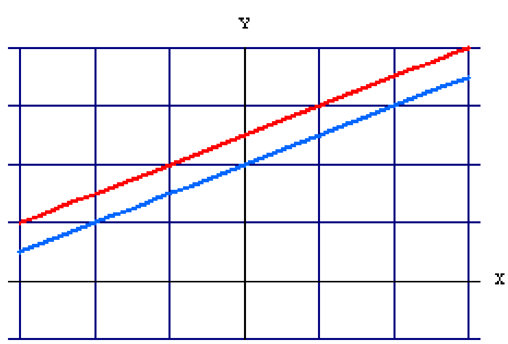
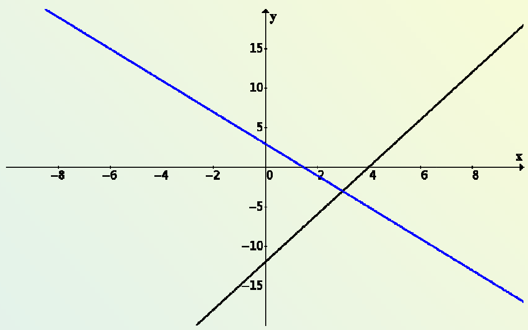


Figura c

Ejemplos



Sistema Compatible Determinado.

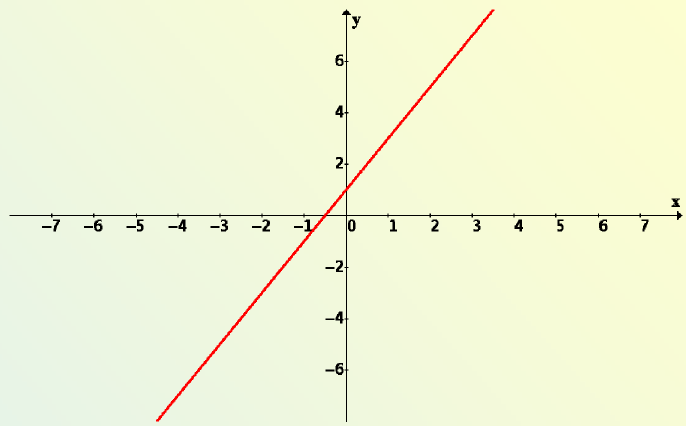
$$\begin{cases} y = 3x - 12 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Posee solución única.

Sistema Compatible indeterminado

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

Posee infinitas soluciones.



Sistema Incompatible

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

No posee solución.

MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUCIÓN

Son muy usados los métodos que a continuación se describen para resolver, analíticamente, sistemas de ecuaciones: Ellos son: método de sustitución, método de igualación, método de reducción y el método por determinantes.

Método de Sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra, la cual se transformará en una ecuación con una sola incógnita la cual se puede resolver. Una vez determinado el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra al reemplazarlo en la expresión donde ella se encuentra despejada.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema $\begin{cases} -10x + 4y = 12 & (1) \\ 4x + 6y = 8 & (2) \end{cases}$

Respuesta: $\begin{cases} -10x + 4y = 12 \Rightarrow \ 4y = 12 + 10x \ \Rightarrow \ y = \dfrac{10x+12}{4} & (3) \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$

$$4x + 6.\left(\frac{10x+12}{4}\right) = 8 \quad \Rightarrow \quad 4x + \frac{60x+72}{4} = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{16x+60x+72}{4} = 8$$

$$16x + 60x + 72 = 8.4 \quad \Rightarrow \quad 76x + 72 = 32 \quad \Rightarrow \quad 76x = 32 - 72 \ \Rightarrow \ 76\,x = -40 \quad \Rightarrow x = \frac{-40}{76} = -\frac{10}{19}$$

$$y = \frac{10x+12}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{128}{76} = \frac{32}{19}$$

Entonces el sistema es compatible determinado $S = \left\{\left(-\frac{10}{19}, \frac{32}{19}\right)\right\}$ Geométricamente su interpretación es que dicho par representa las coordenadas de punto de intersección de las rectas que conforman el sistema

Método de Igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 16 & (1) \\ 4x + y = 10 & (2) \end{cases}$

Respuesta:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \Rightarrow \ -5y = 16 - 2x \ \Rightarrow \ 5y = 2x - 16 \ \Rightarrow y = \dfrac{2x - 16}{5} & (3) \\ 4x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 4x \quad (4) \end{cases}$$

$$\frac{2x - 16}{5} = 10 - 4x$$

$$2x - 16 = (10 - 4x).5 \Rightarrow \ 2x - 16 = 50 - 20x$$

$$2x + 20x = 50 + 16 \ \Rightarrow 22x = 66$$

$$x = \frac{66}{22} \Rightarrow \ x = 3$$

$$y = 10 - 4.(3) \ \Rightarrow \ y = 10 - 12 = -2 \ ; \ y = -2$$

El conjunto solución es $S = \{(3; -2)\}$

Su interpretación geométrica es que las rectas se interceptan en el punto $(3,-2)$

Método de Reducción

Consiste en lograr que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 5y = -24 & (1) \\ 8x - 3y = 19 & (2) \end{cases}$

Respuesta:

$$\begin{array}{ll} 8x + 20y = -96 & (1)\ x4 \\ 8x - 3y = 19 & (2) \\ \hline 23y = -115 & \end{array}$$

entonces $y = -\frac{115}{23} = -5$

Entonces $8x - 3(-5) = 19 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{19 - 15}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

La solución es $x = \frac{1}{2} \quad , \quad y = -5$

Su interpretación geométrica es:

Las rectas se interceptan en un único punto, de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$

Método por Determinantes

El sistema debe estar expresado de la forma:
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

se trabaja solamente con los coeficientes de las incógnitas y se forman los siguientes determinantes:

determinante del sistema $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

determinante de x : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

determinante de y : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Calculo de las soluciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c_1} & b_1 \\ \mathbf{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{c_1} \\ a_2 & \mathbf{c_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Análisis del Determinante del sistema

- Si $\Delta \neq 0$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO - SOLUCIÓN ÚNICA
- $Si \quad \Delta = 0$ y si

$$\begin{cases} \Delta x = 0 \quad y \quad \Delta y = 0 \quad \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO. Infinitas Soluciones} \\ \Delta x \neq 0 \quad y \quad \Delta y \neq 0 \quad \text{SISTEMA INCOMPATIBLE} - \text{Ninguna Solución} \end{cases}$$

Valor de un determinante:

El valor del determinante de segundo orden se encuentra por medio de la siguiente regla

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1$$

EJEMPLO

Dado el siguiente sistema
$$\begin{cases} 3x-(9x+y)=5y-(2x+9y) & (1) \\ 4x - (3y+7)=5y - 47 & (2) \end{cases}$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{cases} 3x-9x - y = 5y - 2x - 9y \quad \Rightarrow \quad 3x-9x - y - 5y + 2x + 9y = 0 \\ 4x - 3y - 7 = 5y - 47 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3y - 5y = -47 + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ 4x - 8y = -40 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = (-4).(-8) - 3.4 = 32 - 12 = 20 \qquad \text{la solución es unica, pues } \Delta \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -40 & -8 \end{vmatrix} = 0 - (-40).3 = -(-120) = 120 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = 120$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -40 \end{vmatrix} = 160 - 0 = 160 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = 160$$

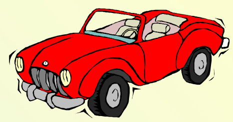
Los valores de x e y serán:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{120}{20} \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{160}{20} \quad \rightarrow \quad y = 8$$

APLICACIONES

1) En una juguetería hay 30 unidades en exposición, entre autitos y bicicletas Se cuentan 104 ruedas. ¿Cuántos vehículos de cada clase hay?



Respuesta

Sean "**x**" cantidad de bicicletas e "**y**" cantidad de autitos.

La primera ecuación que surge es por la cantidad de juguetes en total

cantidad de bicicletas + cantidad de autitos = total de juguetes

x + y = 30

Otro dato que tenemos es la cantidad de ruedas

$$\underbrace{\text{cantidad total de ruedas de bicicletas}}_{2\,.\,x} + \underbrace{\text{cantidad total de ruedas de autitos}}_{4\,.\,y} = \underbrace{\text{total de ruedas}}_{104}$$

2 . x + 4 . y = 104

El sistema a resolver es

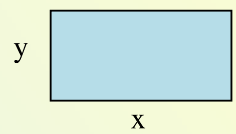
$$\begin{cases} x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x \\ 2x + 4y = 104 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x + 4(30 - x) = 104 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4x + 120 = 104 \quad \Rightarrow$$

$$-2x = -16 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 22$$

La respuesta: Hay 8 bicicletas y 22 autitos

2) Si se aumenta en dos unidades la base de un rectángulo y se disminuye en tres unidades su altura se obtiene un cuadrado. Si se sabe que el rectángulo tiene 30 cm de perímetro, calcule sus dimensiones

DESARROLLO



$$\begin{cases} x+2=y-3 \\ 2x+2y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-5 \\ 2x+2y=30 \end{cases} \Rightarrow x=y-5 \Rightarrow 2(y-5)+2y=30 \Rightarrow 4y=40$$

$$\Rightarrow \quad y=10 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

Respuesta: Las dimensiones de un rectángulo son base = 10 cm y altura = 5 cm

3) Un avión tiene una velocidad que es la tercera parte de la de un avión a retropropulsión. En 1 hora el avión a retropropulsión recorre 600 km más que los que recorre el otro avión en $1\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuál es la velocidad de cada uno de los aviones?

Solución:

Sean v_1: velocidad del 1º avión y sea v_2 : velocidad del 2º avión (a retropropulsión)

Entonces $v_1 = \frac{1}{3} v_2$

Además $v_2 \,.\, 1 =$ distancia recorrida por el 2º avión en 1 hora

$v_1 \,.\, 1\frac{1}{2}$ = distancia recorrida por el 1º avión en $1\frac{1}{2}$ hora

Entonces $v_2 \,.1 = v_1 1\frac{1}{2} + 600$

Se forma el sistema

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} v_2 \\ v_2 = \frac{3}{2} v_1 + 600 \end{cases}$$

Reemplazando la 1º ecuación en la 2º se tiene: $v_2 = \frac{3}{2}\frac{1}{3} v_2 + 600$

Resolviendo para v_2 se tiene $v_2 = \frac{1}{2} v_2 + 600$, $\frac{1}{2} v_2 = 600 \Rightarrow v_2 = 1200\,\text{km/h}$

Reemplazando en la 1º ecuación se tiene $v_1 = \frac{1}{3} v_2 \Rightarrow v_1 = 400\,\text{km/h}$

Respuesta: $v_1 = 400\,\text{km/h}$ y $v_2 = 1200\,\text{km/h}$

ECUACIÓN POLINOMICA DE SEGUNDO GRADO O ECUACIÓN CUADRÁTICA

Las ecuaciones cuadráticas o polinómicas de 2º grado presentan la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{donde } a, b, c \in R \quad \text{con } a \neq 0$$

Termino cuadrático

Término lineal

Término constante

Raíces o soluciones

Toda ecuación de 2º grado tiene exactamente dos raíces complejas.

Ecuaciones cuadráticas en una y dos variables

A toda ecuación de 2º grado en una variable $ax^2 + bx + c = 0$ le podemos asociar una ecuación de 2º grado en dos variables $y = ax^2 + bx + c$, dicha ecuación representa una parábola en el plano.

Las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ representan los valores de x para los cuales $y = 0$. Esto es, las raíces son las abscisas de los puntos donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje x.

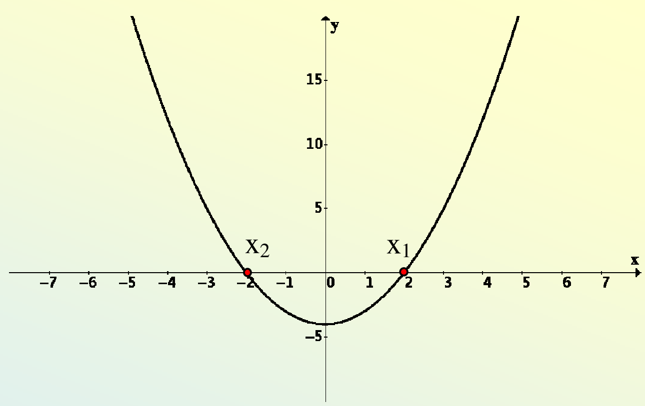
Ejemplo:

La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene por raíces a

$x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Entonces

la parábola $y = x^2 - 4$ intercepta al eje x en

los puntos (2, 0) y (-2, 0)



MÉTODOS PARA DETERMINAR LAS RAÍCES

Caso 1: Ecuaciones incompletas

Llamamos ecuación incompleta de 2º grado a aquella donde b = 0 o c = 0

En los casos donde **b = 0** se llega al valor de x con solo despejar

Ejemplos:

a) $3x^2 - 12 = 0$ b) $2x^2 + 6 = 0$

Respuestas:

a) $3x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad o \quad x_2 = -2$

b) $2x^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = -6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -3$

$x = \pm\sqrt{-3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{3}\ j \quad o \quad x_2 = -\sqrt{3}\ j$

En los casos donde **c = 0** se llega al valor de x factoreando

Ejemplos

a) $-2x^2 + 5x = 0$ b) $4x^2 - \sqrt{8}x = 0$

Respuestas

a) $-2x^2 + 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(-2x+5) = 0$

$x = 0 \quad o \quad -2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad o \quad x_2 = \frac{5}{2}$

b) $4x^2 - \sqrt{8}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(4x - \sqrt{8}) = 0$

$x = 0 \quad o \quad 4x - \sqrt{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad o \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Caso 2: Ecuaciones completas

Para resolver la ecuación de 2º grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ pueden usarse cualquiera de los siguientes métodos:

- método de completar cuadrados
- por medio de la fórmula general
- usando las propiedades de las raíces

METODO DE COMPLETAR CUADRADOS

Este método consiste en convertir a una expresión que posee un término cuadrático y uno lineal, como mínimo, en una expresión que contenga un trinomio cuadrado perfecto y que posteriormente se podrá factorear.

Ejemplo:

Sea la ecuación $2x^2 - 4x - 30 = 0$. Para encontrar las soluciones por el método de completar cuadrados se deben seguir los siguientes pasos:

- Expresar la ecuación dada en la forma $x^2 + bx + c = 0$. Para ello se divide ambos miembros por el coeficiente del término cuadrático. En este caso, en 2

$$\frac{2x^2 - 4x - 30}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

- En el primer miembro sumar y restar un nuevo término, $\left(\frac{coeficiente\ lineal}{2}\right)^2$

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 15 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 16 = 0$$

- Queda formado un trinomio cuadrado perfecto donde x puede despejarse de dos modos distintos

Factoreando el 1° miembro	Despejando x
$(x-1)^2 - 16 = 0$	$(x-1)^2 = 16$
$(x-1-4)(x-1+4) = 0$	$x - 1 = \pm 4$
$(x-5)(x+3) = 0$	$x_1 = 5 \quad o \quad x_2 = -3$
$x_1 = 5 \quad o \quad x_2 = -3$	

CÁLCULO DE LAS RAÍCES POR LA FÓRMULA de BHASKARA

Usando el método de completar cuadrados en la ecuación $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$, se llega a la fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

que se emplea para determinar las raíces de la ecuación. En esta fórmula se observa que las soluciones dependen del signo del radicando presente en la misma.

NATURALEZA DE LAS RAÍCES

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la cantidad $\Delta = b^2 - 4.a.c$ se llama discriminante de la ecuación. El signo de Δ determina la característica o naturaleza de las raíces.

Si $\Delta = b^2 - 4.a.c > 0$, las raíces son reales y diferentes

Si $\Delta = b^2 - 4.a.c = 0$, las raíces son reales e iguales

Si $\Delta = b^2 - 4.a.c < 0$, las raíces son complejas conjugadas

Ejemplos

1) Determinar el carácter de las raíces de:

$a)\ 6x^2 - 14x + 4 = 0$

$b)\ 3x^2 - 6x + 9 = 0$

Respuestas

$a)\ 6x^2 - 14x + 4 = 0 \quad a = 6;\ b = -14\ ;\ c = 4 \quad \Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4.6.4 = 100 > 0$

Las raíces son reales y distintas

$b)\ 3x^2 - 6x + 9 = 0 \quad a = 3;\ b = -6\ ;\ c = 9 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-6)^2 - 4.3.9 = -78 < 0$

Las raíces son complejas

2) Resolver las siguientes ecuaciones empleando la fórmula general:

a) $2x^2 - 4x - 30 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

Respuestas:

a) En este caso: a = 2 , b = -4 , c = -30

sustituyendo los valores en la ecuación general tendremos:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2(-30)}}{2.2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+240}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{4} = \frac{4 \pm 16}{4}$$

las raíces son:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4+16}{4} = 5 \quad \Rightarrow \\ x_2 = \dfrac{4-16}{4} = -3 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$x_1 = 5$ y $x_2 = -3$

b) En este caso: a = 1 , b = 1 , c = 1

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1}}{2.} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2.} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2.} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

las raíces son: $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j$

CALCULO DE LAS RAÍCES USANDO SUS PROPIEDADES

Usando las propiedades de las raíces se puede factorear el polinomio cuadrático como así también encontrar las raíces en caso de ser desconocidas.

Propiedad 1: Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y sus raíces x_1 y x_2. Entonces se cumple que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Esto nos permite factorear el trinomio presente en el primer miembro de la ecuación, los que sean cuadrados perfectos y los que no lo sean.

Ejemplo:

Factorear $2x^2 + 4x - 30 = 0$

Respuesta: Se deben encontrar las raíces. Ellas son:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.2(-30)}}{2.2} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{4} = \frac{-4 \pm 16}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = -5$$

Por lo tanto $2x^2 + 4x - 30 = 2(x-3)(x+5)$

Propiedad 2: Si $a = 1$, se tiene que $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

De aquí se deduce que
$$x_1 + x_2 = -b$$
$$x_1 . x_2 = c$$

Esta propiedad se aplica para la resolución de las ecuaciones de manera mental, buscando dos números que sumen – b y que multiplicados arrojen el resultado c.

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones, usando las propiedades de las raíces

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 + 5x + 4 = 0$

Respuesta:

a) Para $x^2 + x - 6 = 0$, se deben buscar dos números que sumen -1 y que multiplicados den -6

$x_1 + x_2 = -b \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -1$

$x_1 . x_2 = c \quad \Rightarrow \quad x_1 . x_2 = -6 \quad \Rightarrow$ Ellos son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$

b) Se deben buscar dos números que sumen -5 y que multiplicados den 4

$x_1 + x_2 = -5$

$x_1 . x_2 = 4 \quad \Rightarrow$ Ellos son $x_1 = -4$ y $x_2 = -1$

No siempre **todas** las soluciones de la ecuación, son soluciones del problema planteado. Esto quiere decir que hay que verificar si las soluciones pertenecen al dominio de la ecuación correspondiente o si la solución corresponde a una solución **real** planteada.

APLICACIONES

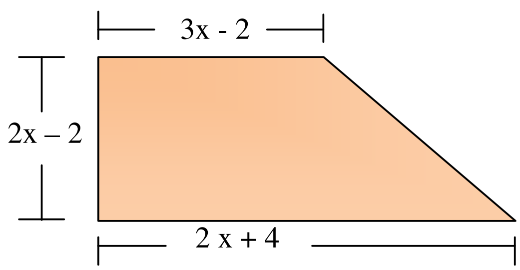
1) Se proyecta la construcción del salón de cómputos de la facultad. De acuerdo a las necesidades, el mismo debe ser de forma cuadrada y tener una superficie de 169 m^2. Determine sus dimensiones.

Respuesta: Sea x el lado del cuadrado y A su área, entonces:

$$A = x^2$$
$$x^2 = 169 \rightarrow x = \pm\sqrt{169}$$
$$x = \pm 13$$

Matemáticamente ambos resultados son correctos, pero si tenemos en cuenta que la medida de una dimensión no puede ser negativa, el salón tiene 13 metros de lado

2) La medida en cm^2 de la superficie del trapecio de la figura es 34. Calcule la medida en cm de las bases y la altura.



Respuesta:

Sabiendo que la Superficie del trapecio es: $\dfrac{(B+b).h}{2}$ donde:

B: Base mayor b : base menor h :altura

Reemplazando tenemos: $\dfrac{(2x+4+3x-2)\,(2x-2)}{2} = 34$

Simplificando $\dfrac{(5x+2)\,(2x-2)}{2} = 34$, entonces $10x^2 - 6x - 4 = 68$. Esto es $10x^2 - 6x - 72 = 0$

Equivalente a $5x^2 - 3x - 36 = 0$

Las soluciones de esta ecuación se encuentran mediante: $\dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4.5.36}}{10} = \dfrac{3 \pm 27}{10}$

Se tiene $x_1 = 3$ y $x_2 = -2.4$

El último valor no puede aceptarse pues al reemplazar en las expresiones nos dan valores negativos para las bases y la altura, lo que no puede ser.

Entonces el único valor de x es 3 y las medidas son: B = 10 cm b = 7 cm h = 4cm

ECUACIONES BICUADRADAS

Se llaman así a las ecuaciones polinómicas de 4º que presentan la siguiente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Este tipo de ecuaciones, como cualquier ecuación polinómicas de 4º grado, tiene exactamente cuatro raíces, que pueden ser todas reales, dos reales y dos complejas, o todas complejas.

Ejemplos:

Las siguientes ecuaciones son bicuadradas.

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ b) $2x^4 + 6x^2 + 4 = 0$

En las ecuaciones de este tipo es conveniente hacer el siguiente cambio de variable: $z = x^2$, de ese modo la ecuación se convierte en cuadrática y se la puede resolver por cualquiera de los métodos antes mencionados.

Solución:

a) En $x^4 - x^2 - 12 = 0$, al hacer el cambio $z = x^2$ logramos $z^2 - z - 12 = 0$

Sus soluciones son: $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4.12}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = -3 \end{cases}$

Si reemplazamos en $z = x^2$, se tendrá que $x = \pm\sqrt{z}$, por lo tanto

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad$ y $\quad x_2 = -2$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{-3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \sqrt{3}\,j \quad$ y $\quad x_4 = -\sqrt{3}\,j$

b) $2x^4 + 6x^2 + 4 = 0$

Siguiendo el mismo procedimiento se tendrá:

$$2z^2 + 6z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.2.4}}{2.2} = \frac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} z_1 = -2 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

Entonces $x_{1,2} = \pm\sqrt{-2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{2}\,j \quad$ y $\quad x_2 = -\sqrt{2}\,j$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad x_3 = j \quad$ y $\quad x_4 = -j$

ECUACIÓN ALGEBRAICA RACIONAL FRACCIONARIA

Llamamos **ecuación racional o fraccionaria** a toda ecuación de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ donde P y Q son polinomios en la variable x con la condición $Q(x) \neq 0$

Ejemplos:

a) $\frac{3x}{2x+1} = 0$ es una ecuación racional fraccionaria

Para resolverla hay que considerar que una fracción es cero si y solo si su numerador es cero. Además los valores encontrados serán solución de la ecuación siempre que no anulen al denominador. Por lo tanto

$$\frac{3x}{2x+1}=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$x = 0$ es solución dado que para este valor se verifica la ecuación.

b) $\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0$ es una ecuación racional fraccionaria

Una alternativa es llevarla a la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Entonces

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1-2x}{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x}{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

Pero x = 1 es aceptada como solución? La respuesta es NO, ya que si reemplazamos x por 1 se anula el denominador y por lo tanto para ese valor no está definida la expresión. Entonces en este caso el conjunto solución es vacío: S = ϕ.

c) $\frac{1-x}{x^2+4x+4} + \frac{3}{x+2} = \frac{2}{5+x}$

Para llevarla a la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$ se debe sacar común denominador en el 1º miembro

$$\frac{1-x+3(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2}{5+x} \quad \Rightarrow \quad \frac{7+2x}{(x+2)^2} = \frac{2}{5+x}$$

$$(7+2x)(5+x) = 2.(x+2)^2 \quad \Rightarrow \quad 35+10x+7x+2x^2 = 2.(x^2+4x+4) \quad \Rightarrow$$

$$35+17x+2x^2 = 2x^2+8x+8 \quad \Rightarrow \quad 17x-8x = -27 \quad \Rightarrow \quad 9x = -27 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

El valor $x = -3$ es la solución de la ecuación planteada ya que verifica a la misma.

ECUACIONES IRRACIONALES

Son todas las ecuaciones donde las incógnitas aparecen al menos una vez bajo el signo de radicación. La resolución se basa en la aplicación de las propiedades de las operaciones de los números reales, especialmente las de la radicación y/o potenciación.

Ejemplos: a) $\sqrt{2x-3}=5$ b) $\sqrt{4x-3}-1-\sqrt{2x-2}=0$

Respuesta:

a) $\sqrt{2x-3}=5 \quad \Rightarrow$ elevando al cuadrado m. a m. $2x-3=25 \quad \Rightarrow \quad x=14$

Verificación: $\sqrt{2.14-3}=5$, entonces $x=14$ es la solución

b) $\sqrt{4x-3}-1-\sqrt{2x-2}=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4x-3}-1=\sqrt{2x-2}$

Elevando al cuadrado miembro a miembro $\left(\sqrt{4x-3}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x-2}\right)^2$

Desarrollando los cuadrados $4x-3-2.\left(\sqrt{4x-3}+1\right)=2x-2$

Dejando la raíz sola en un miembro y simplificando $2x=2\sqrt{4x-3}$

Elevando al cuadrado nuevamente $4x^2=4(4x-3)$

Simplificando $4x^2-16x+12=0$

Resolviendo al ecuación cuadrática

$$x^2-4x+3=0 \quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4.3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Como $x_1=3$ y $x_2=1$ verifican la ecuación de partida entonces son las soluciones

ECUACIONES TRASCENDENTES

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales más sencillas son de la forma

$$a^{x} = b \quad \text{con } a > 0$$

Para resolver ecuaciones exponenciales, en algunas oportunidades se puede aplicar propiedades de la potenciación, pero en todos los casos se puede aplicar las propiedades de los logaritmos. Ambas se detallan a continuación.

Propiedades:

Igualdad entre potencias de la misma base: Si dos potencias con la misma base son iguales, entonces los exponentes también deben serlo

$$a^{x} = a^{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Propiedad uniforme del logaritmo: si en una igualdad se aplica logaritmo de la misma base miembro a miembro, la igualdad se mantiene

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = \log_a y$$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $3^{3x^2-12}=1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-14}=32$

c) $3^{x-1}=5$

d) $e^{x+x^2}=2$

Respuestas:

En los apartados a) y b) se pueden aplicar cualquiera de las dos propiedades, pero los apartados c) y d) solo se pueden resolver aplicando logaritmos ya que no es posible convertir las bases para llegar a una base común.

a) $3^{3x^2-12}=1 \Rightarrow 3^{3x^2-12}=3^0$

$$3x^2-12=0$$

$$x^2=4 \Rightarrow x_1=2 \quad o \quad x_2=-2$$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-14}=32 \Rightarrow 2^{-x^2+14}=2^5$

$$-x^2+14=5$$

$$x^2=9 \Rightarrow x_1=3 \quad o \quad x_2=-3$$

c) $3^{x-1}=5 \Rightarrow \log 3^{x-1}=\log 5$

(x – 1) log 3 = log 5

$$x-1=\frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x=1+\frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x\approx 2{,}46$$

d) $e^{x+x^2}=2 \Rightarrow \ln e^{x+x^2}=\ln 2$

$$x^2+x-\ln 2=0$$

$$x+x^2=\ln 2$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\ln 2}}{2}=\frac{-1\pm 1{,}94}{2} \Rightarrow x_1=0{,}47 \quad o \quad x_2=-1{,}47$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas más sencillas presentan la forma:

$$\log_a x = b \quad \text{con} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1$$

Para resolverlas recordar:

$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b$

$\log_a x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

Atención

Debido a que no siempre están definidos los logaritmos hay que verificar los valores encontrados en la ecuación original para luego concluir cuales son las soluciones válidas.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_3 2x - 4 = 0$ b) $\log_3(x+1) + \log_3 x = 1$ c) $\log_{x+2}(22x - 11) = 2$

Respuestas:

Recuerde:
Para que el logaritmo esté definido el número logaritmado debe ser positivo y la base positiva y distinta de 1.

a) $\log_3 2x - 4 = 0$

Para encontrar la solución, aplicamos la definición

$\log_3 2x - 4 = 0$

$\log_3 2x = 4$

$3^4 = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{81}{2}$

Verificación $\log_3 2.\frac{81}{2} - 4 = \log_3 81 - 4 = 4 - 4 = 0$

b) $\log_3(x+1)+\log_3 x = 1$

Para resolverla aplicamos propiedades

$$\Rightarrow \ \log_2[(x+1)x]=1$$

$$(x+1)x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4.2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad y \qquad x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Luego, $x_1 \ y \ x_2$ verifican la ecuación de partida, por lo tanto ambas son soluciones.

c) $\log_{x+2}(22x-11) = 2$

Aplicando la definición tenemos: $22x - 11 = (x+2)^2$

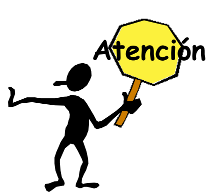
$$22x - 11 = x^2 + 4x + 4 \ \Rightarrow \ x^2 - 18x + 15 = 0 \ \Rightarrow$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4.18}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{252}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \cong 16{,}94 \quad \text{y} \quad x_2 \cong 1.06$$

Para ambos está definido el logaritmo por lo tanto ambas son soluciones $x_1 \cong 16{,}94$ y $x_2 \cong 1.06$

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Un sistema de ecuaciones exponenciales (o logarítmicas) es un conjunto de ecuaciones exponenciales (o logarítmicas) cuyas soluciones comunes se pretende hallar. También pueden presentarse sistemas de ecuaciones mixtos, o sea sistemas integrados por ecuaciones exponenciales, logarítmicas y/o algebraicas.



Para resolverlas se transforma el sistema dado en un sistema de ecuaciones algebraicas, y luego se aplican los métodos estudiados

Ejemplos: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)\ \begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 4^{2x-y} = 1 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} 2.\ 3^x + 2^{3+y} = 38 \\ 2^y - 3^x = 1 \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} \text{logx} + \text{logy} = \dfrac{3}{2} \\ \text{logx} - \text{logy} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Respuestas:

a) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 4^{2x-y} = 1 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^5 \\ 4^{2x-y} = 4^0 \end{cases}$ y por lo tanto $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Por el método de sustitución se tiene $\begin{cases} x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

$$2(5 - 2y) - y = 0 \Rightarrow 10 - 5y = 0 \Rightarrow 10 - 5y = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$$

b) $\begin{cases} 2.\ 3^x + 2^{3+y} = 38 \\ 2^y - 3^x = 1 \end{cases}$

Por propiedades se tiene $2^{3+y} = 2^3.2^y = 8.2^y$ y el sistema queda expresado: $\begin{cases} 2.\ 3^x + 8.2^y = 38 \\ 2^y - 3^x = 1 \end{cases}$

Se aconseja hacer los siguientes cambios de variables: $3^x = a$ y $2^y = b$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 2.\ a + 8.b = 38 \\ b - a = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2.\ a + 8.\ b = 38 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{38 - 2a}{8} \\ b - a = 1 \quad \rightarrow \quad b = a + 1 \quad \Rightarrow \quad b = 4 \\ \Rightarrow \dfrac{38 - 2a}{8} = a + 1\ ; \quad 38 - 2a = 8a + 8 \quad \Rightarrow 10a = 30 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

como $3^x = a$ entonces $3^x = 3$. Se concluye que $x = 1$

como $2^y = b$ entonces $2^y = 4 = 2^2$. Se concluye que $y = 2$

La solución es $x = 1$ e $y = 2$

$c)\ \begin{cases} log\ x + log\ y = \dfrac{3}{2} \\ log\ x - log\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} u + v = \dfrac{3}{2} \\ u - v = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Esto se logra haciendo los cambios de variables: $u = log\ x$ y $v = log\ y$

Resolviendo se tiene $u = 1$; $v = 2$ y las variables originales resultan $log\ x = 1$ y $log\ y = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto la solución es $x = 10$; $y = \sqrt{10}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas donde la/s incóngita/s son ángulos. Resolver una ecuación trigonométrica en el intervalo [0, 2π] es encontrar todos los ángulos menores o iguales a un giro que verifican la ecuación.

Las estrategias a emplear son diversas. La elección del método depende de la ecuación en sí. A continuación damos ejemplos de algunos casos típicos.

Ecuaciones que se pueden expresar usando una única razón trigonométrica

Ejemplo:

$$2sen^2 x - \cos^2 x - 2 = 0$$

Respuesta:

$$2sen^2 x - \cos^2 x - 2 = 0$$

$$2sen^2 x - (1 - sen^2 x) - 2 = 0$$

$$3sen^2 x - 3 = 0$$

$$sen^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad sen\,x = 1 \quad o \quad sen\,x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \quad o \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

a) Ecuaciones que se pueden resolver como una ecuación cuadrática

Ejemplo:

$$2sen^2 x + 3senx + 1 = 0$$

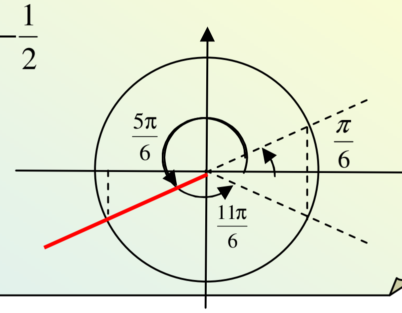
Respuesta: Llamando $y = senx$, la ecuación se convierte en $2y^2 + 3y + 1 = 0$

Los valores de $y = sen\,x$ son $\dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.2}}{2.2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} y = -1 \\ o \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Entonces, puede ocurrir que $sen\,x = -1$ o $sen\,x = -\dfrac{1}{2}$

Si $sen\,x = -1$, entonces $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Si $sen\,x = -\dfrac{1}{2}$, entonces $x = \dfrac{5\pi}{6}$ o $x = \dfrac{11\pi}{6}$



b) Ecuaciones que se pueden resolver factoreando

Ejemplo:

$$2\sqrt{2}\cos x\, sen\, x - 2sen\, x - 2\cos x + \sqrt{2} = 0$$

Aplicando factoreo en grupos se tiene:

$$(2\sqrt{2}\cos x\, sen\, x - 2sen\, x) - (2\cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$2sen\, x(\sqrt{2}\cos x - 1) - (2\cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$2\sqrt{2}\; sen\, x\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \;\text{ y }\; \text{como } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2}sen\; x - 2\right) = 0$$

$$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \;\text{ o }\; x = \frac{7\pi}{4}$$

o

$$2\sqrt{2}sen\, x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; sen\; x = \frac{2}{2\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; sen\; x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \;\text{ o }\; x = \frac{3\pi}{4}$$

Las soluciones son $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ (Ver gráficos adjuntos)