WIKIPEDIA

Función cuadrática

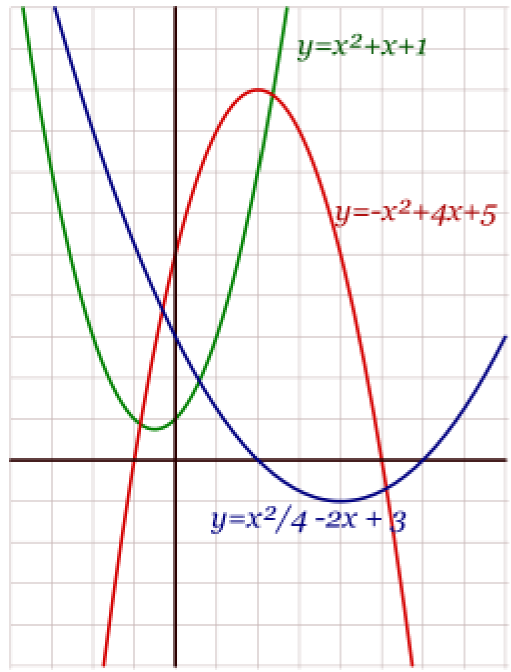
En matemáticas, una **función cuadrática** es una variable de una función polinómica definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.[1] También se da el caso que se le llame **Trinomio cuadrado perfecto.**[2] También se denomina **función cuadrática** a funciones definidas por polinomios cuadráticos de más de una variable, por ejemplo:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Función cuadrática



Gráfica de Función cuadrática

Definición	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Tipo	Curva parabólica
Dominio	$\mathbb{R}$
Imagen	$[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)o(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$
Cálculo infinitesimal	
Derivada	$f'(x) = 2ax + b$

En este caso el conjunto de puntos que resultan al igualar el polinomio a cero representan lugares geométricos que siempre es posible reducir a una de las formas:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c^2, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \frac{y}{b} = c$$

Que corresponden a tres tipos de secciones cónicas (elipse, hipérbola y parábola).

Índice

Funciones cuadráticas de una variable

Las gráficas de estas funciones corresponden a parábolas verticales (eje de simetría paralelo al eje de las ordenadas), con la particularidad de que cuando $a>0$, el vértice de la parábola se encuentra en la parte inferior de la misma, siendo un mínimo (es decir, la parábola se abre "hacia arriba"), y cuando $a<0$ el vértice se encuentra en la parte superior, siendo un máximo (es decir, la parábola se abre "hacia abajo").

El estudio de las funciones cuadráticas tiene numerosas aplicaciones en campos muy diversos, por ejemplo la caída libre o el tiro parabólico.

La derivada de una función cuadrática es una función lineal y su integral indefinida es una familia de funciones cúbicas.

Raíces

Véase también: Ecuación de segundo grado

Las raíces (o ceros) de una función cuadrática, como en toda función, son los valores de x, para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$. Son denotadas habitualmente como: x_1 y x_2, dependiendo del valor del discriminante Δ definido como $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Dos soluciones reales y diferentes si el discriminante es positivo, $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Corta la parábola al eje X en dos puntos diferentes.

- Una solución real(o solución doble) si el discriminante es cero, $\Delta = 0$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- La parábola es tangente al eje X.

- La parábola no corta al eje X.

- El único caso restante es que el discriminante sea negativo, $\Delta < 0$.

En tal caso, las raíces no son reales, sino que son dos números complejos conjugados:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Representación analítica

Hay tres formas de escribir una función cuadrática, aplicables según el uso que se le quiera dar a la función, un estudio analítico de la función o de la ecuación cuadrática, una interpretación o construcción geométrica de la parábola, etc.

Forma desarrollada o polinómica

La *forma desarrollada* de una función cuadrática (o forma estándar) corresponde a la del polinomio de segundo grado, escrito como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede escribir en **forma factorizada** en función de sus raíces como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siendo **a** el coeficiente principal de la función, y x_1 y x_2 las raíces de $f(x)$. En el caso de que el discriminante Δ sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$ por lo que la factorización adquiere la forma:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

En este caso a x_1 se la denomina **raíz doble**, ya que su orden de multiplicidad es 2. Si el discriminante es negativo, las soluciones son complejas, no cabe la factorización.[3]

Forma canónica

Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (h, k) las coordenadas del vértice de la parábola.

Traslación

A partir de la función primitiva, podemos obtener diferentes desplazamientos (traslación) de las funciones, éstos se pueden dar en dos sentidos: Horizontal (sobre el eje de las x) o Vertical (sobre el eje de las y).

La función $y=x^2$ es la función primitiva de la función cuadrática, a partir de ésta podemos entonces obtener las funciones cuyas gráficas están desplazadas sobre los ejes x e y.

Para los desplazamientos horizontales trabajamos con funciones de la forma $y = (x - a)^u$, que siguen la regla de:

- A mayor a le corresponde un desplazamiento horizontal hacia la derecha.

- A menor a le corresponde un desplazamiento horizontal hacia la izquierda.

Para los desplazamientos verticales trabajamos con funciones de la forma $y = x^2 + b$, que siguen la regla de:

- A mayor b le corresponde un desplazamiento vertical hacia arriba.

- A menor b le corresponde un desplazamiento vertical hacia abajo.[4]

Representación gráfica

Intersección con el eje y

La función corta el **eje y** en el punto y = f(0), es decir, la parábola corta el eje **y** cuando **x** vale cero (0):

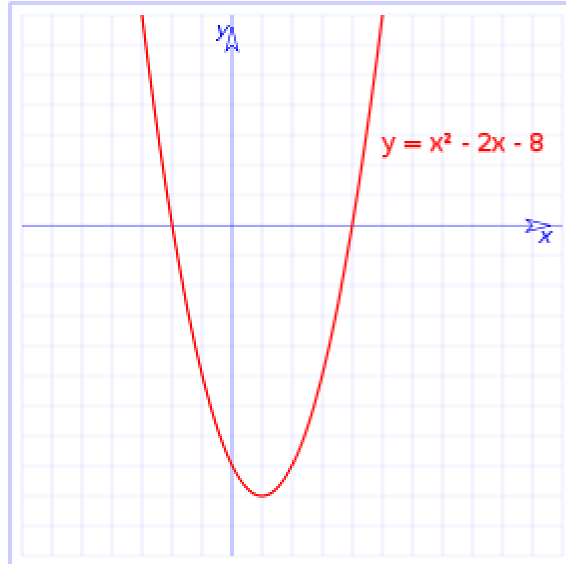
$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

lo que resulta:

$$y = f(0) = c$$

la función corta el **eje y** en el punto (0, c), siendo **c** el término independiente de la función.

A este punto de la función también se lo conoce con Ordenada al Origen, ya que se da en los términos.



Intersección con el eje x

La función corta al **eje x** cuando **y** vale 0, dada la función

$$y = ax^2 + bx + c$$

es decir:

$$y = 0 \quad \longmapsto \quad ax^2 + bx + c = 0$$

las distintas soluciones de esta ecuación de segundo grado, son los casos de corte con el **eje x**, que se obtienen, como es sabido, por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si la función *no corta* al eje **x**, la fórmula anterior no tiene solución real. Puede ocurrir que no tenga intersecciones con el eje x, por ejemplo $y = x^2 + 2$.

Extremo

En principio, en matemáticas se nombra como **extremo** tanto al máximo como al mínimo, por ejemplo en el conjunto S = {1,5,9, 13, 17} el *mínimo* es 1 y el *máximo* 17, y los *extremos* son 1 y 17. Para calcular el extremo de una función cuadrática, se puede usar un teorema, abordable en álgebra elemental, apoyándose en el comportamiento de una suma de un cuadrado de una variable con un número real cualquiera.[5]

Teorema fundamental del trinomio cuadrático

El trinomio cuadrático real

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

tiene un valor extremo que lo consigue cuando

$$x = \frac{-b}{2a}$$

este valor resulta mínimo si $a > 0$, máximo si $a < 0$. Si existe $y_{\text{máx}}$, no existe $y_{\text{mín}}$, y recíprocamente.[6] Se abreviará como TFTC.

Problema 1

Descomponer el número positivo *s*, en dos sumandos, de tal modo que el producto de ellos sea máximo. Sea uno de los sumando x , el otro sumando será s-x y su producto $p = x(s-x)$

$p = -x^2 + sx$.

Luego aplicando el TFTC resulta $x = s/2$; en tal caso s-x = s/2. En consecuencia el producto alcanza el valor máximo si ambos sumandos son iguales. Si la suma es 30 el producto se alcanza cuando los sumados son 15 y 15, cuyo producto es 225.[7]

Problema 2

Se tiene una alambrada de 100 metros para cercar un terreno rectangular, hallar la máxima área de terreno a cercar. Si los lados miden x, y se tiene que $2x + 2y = 100$ de donde $y = 50-x$ y el área es

$A = x(50-x) = -x^2+50x$ y aplicando el TFTC y el resultado anterior, puesto que la suma $x + (50-x) = 50$ el producto A es máximo cuando $x = 50-x$, o bien $x= 25$.

Luego la máxima área es $25 \times 25 = 625$

Alternativa del cálculo diferencial

Toda función cuadrática posee un **máximo** o un **mínimo**, que es el vértice de la parábola. Si la parábola tiene concavidad hacia arriba, el vértice corresponde a un mínimo de la función; mientras que si la parábola tiene concavidad hacia abajo, el vértice será un máximo.

Dada la función en su forma desarrollada: $f(x) = ax^2 + bx + c$, la coordenada **x** del vértice será simplemente: $x = \frac{-b}{2a}$. La coordenada **y** del vértice corresponde a la función *f* evaluada en ese punto.

Dada la forma canónica: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, las coordenadas explícitas del vértice son: *(h,k)*

la derivada de la función, y se iguala a cero, la solución a esta ecuación son los posibles máximos y mínimos de la función, en este caso, partiendo de la función cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c$$

calculamos su derivada respecto a **x**:

$$\frac{dy}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

que si la igualamos a cero, tenemos:

$$2ax + b = 0$$

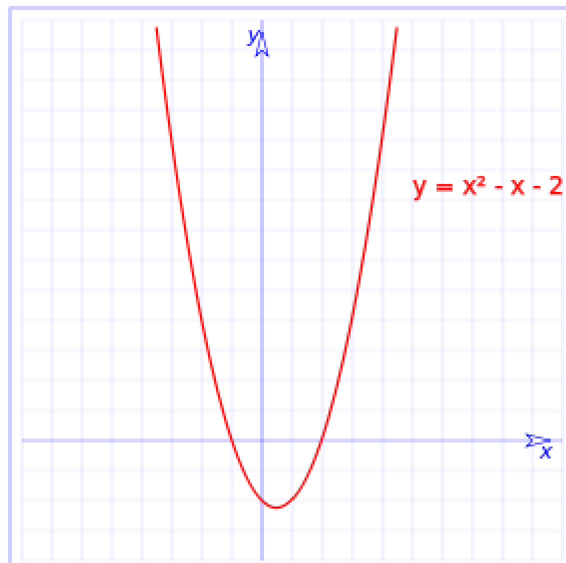
donde **x** valdrá:

Para saber si es un máximo o un mínimo es necesario ver la derivada segunda de la función, veamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{dy}{dx}\left(2ax + b\right) = 2a$$

esto es: **2a** será positivo cuando **a** sea positivo y negativo si **a** es negativo, por tanto, si la derivada segunda **2a** es positiva la parábola es cóncava y el punto será un mínimo de la función, si a es negativa la parábola será convexa y sea un máximo.

Ejemplo 1



Dada la función:

$$y = 3x^2 - x - 23$$

Observación : Es indiferente notar "y" o notar "f(x)". Ambas expresiones hacen referencia a la imagen de x obtenida a través de la función trabajada.

Calculamos su derivada primera:

$$\frac{dy}{dx}\left(3x^2 - x - 23\right) = 6x - 1$$

Esta derivada valdrá cero:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

cuando:

$$6x - 1 = 0$$

esto es:

$$6x = 1$$
$$x = \frac{1}{6}$$

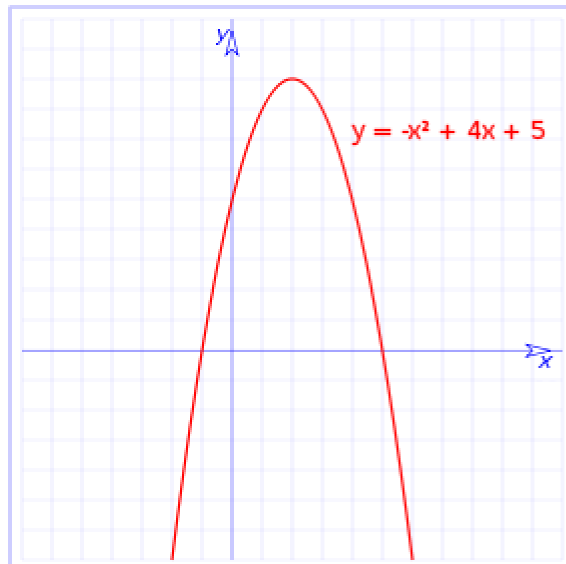
Esta función presenta un extremo relativo para $x = \frac{1}{6}$, veamos si es un máximo o un mínimo, calculando la derivada segunda:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(3x^2 - x - 23\right) = 6$$

Que es 6, dado que 6 es un valor positivo, la función es cóncava, y el extremo relativo que presente para: $x = \frac{1}{6}$, es un mínimo.

Obs. Observando el signo de la constante "a" podemos saber de antemano si estamos ante un mínimo o un máximo. Entonces para a<0 tendremos un máximo y para a>0 un mínimo.

Ejemplo 2



Dada la función:

$$y = -x^2 + 4x + 5$$

Para calcular sus extremos relativos calcularemos su derivada primera:

$$\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 4x + 5\right) = -2x + 4$$

Esta derivada valdrá cero cuando:

$$-2x + 4 = 0$$

esto es:

$$2x = 4$$

que resulta:

$$x = 2$$

Para $x = 2$, la función presenta un extremo relativo, como sabemos que el coeficiente de x^2, es negativo es un máximo. Si realizamos el estudio de signo de la derivada primera, nos da que en $x = 2$ pasa de ser positivo a negativo, o sea la función cambia de ser creciente a decreciente, por lo que confirmamos que es un máximo. De otra forma; se puede calcular la derivada segunda en este punto, comprobando si la función es cóncava o convexa.

Otros procedimientos

- Si es posible factorizar en la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, se halla el máximo del producto de los dos factores binómicos, teniendo en cuenta que

tal caso ocurre si los factores son iguales, luego haciendo $x - x_1 = x - x_2$ se obtiene $x = (x_1 + x_2)/2$ o bien $x = -b/2a$.[8] El signo de a determina si es mínimo o si es máximo.

- La forma canónica se puede escribir como $1/af(x) = (x-h)^2 + k/a$, donde el segundo término conlleva un cuadrado, que es ≥ 0; pero en el segundo miembro si k/a es positivo, hay mínimo con x = h; si k/a es negativo, se obtiene un máximo si x = h.[9] Todo ello para la función g(x)= 1/af(x).

Presencia

En cinemática

en la ecuación del espacio en caso del movimiento uniforme acelerado: $f(x) = at^2 + v_0 t + e_0$, donde a aceleración, v_0, velocidad inicial, e_0 espacio inicial y t, variable del tiempo.[10]

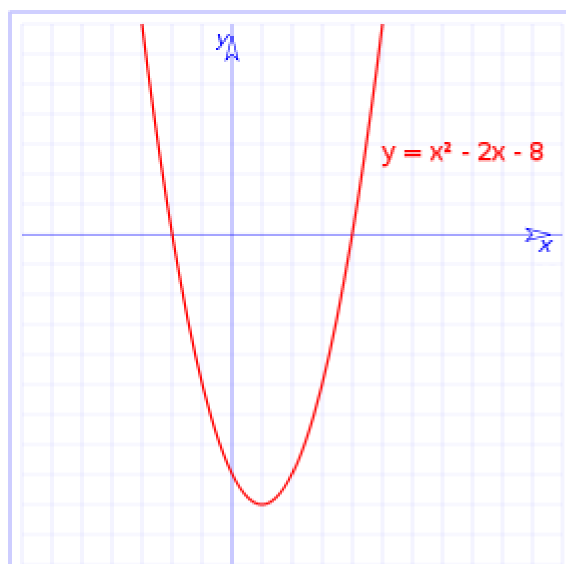
En geometría

- En el área total de un cilindro, como función del radio de la base; de l modo en el área total del cono, en función del radio.
- En el área total de un prisma cuadrado, función del lado de la base, altura constante, lo mismo para la pirámide cuadrada.[11]

Presencia histórica

Arquímedes calculó el área de un sector parabólico, limitado por un rectángulo, en términos modernos según la función $x = f(y) = y^2$.[12]

Determinar la ecuación conocidos tres puntos



Partiendo de la forma de la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c$$

y conocidos tres puntos del plano x y por los que pasa una función polinómica de segundo grado:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3)$$

se cumplirá que:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

con lo que tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, donde las incógnitas son: a, b y c, este sistema tendrá solución si el determinante de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero.

Representando el sistema ordenado de forma convencional:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Con lo que podemos calcular los valores de los coeficientes:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Véase también

- Ecuación cuadrática
- Parábola
- Movimiento parabólico
- Completar el cuadrado
- Polinomio
- Funciones matemáticas
- Geometría analítica

Referencias

1. Lehmann: Álgebra, Limusa Wiley, Máxico D-F.
2. I.P. Natansón. *Problemas elementales de máximo y mínimo Suma de cantidades infinitamente pequeñas*, Editorial Mir, Moscú (1977)
3. No tiene sentido la presencia de complejos, se trata de función real de variable real
4. *Álgebra y funciones elementales*. Alexandrov y otros, editorial Mir.
5. Haaser- Lasalle- Sulivan. *Análisis Matemático I*
6. Natansón: Op cit.
7. Natansón. Op. cit.
8. Bruño: Álgebra superior, edición española
9. G.M. Bruño ibídem
10. UCH. Física general, Lima (2005)
11. Fórmulario de matemáticas de Schaumm, Mc Graw Hill
12. Apostol, Tom. Calculus

Bibliografía

1. Grupo Epsilon, ed. (9 de 1994). *Estudio de funciones: la función cuadrática* (1 edición). Fundación Bancaja. ISBN 978-84-88715-06-7.
2. Gallego Palomero (7 de 1989). *Función cuadrática* (1 edición). Ediciones SM. ISBN 978-84-348-2869-8.

Enlaces externos

- Función cuadrática (https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0416-02/indice.htm)