WIKIPEDIA

Función racional

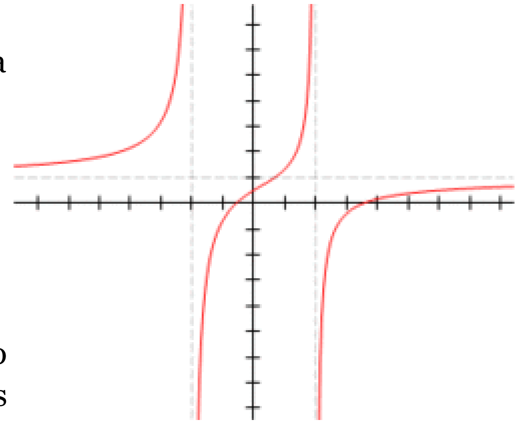
En matemáticas, una **función racional** de una variable es una función que puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios y x una variable, siendo Q distinto del polinomio nulo, esta fracción es irreducible, es decir que las ecuaciones P(x) = 0 y Q(x) = 0 carecen de raíces comunes. Esta definición puede extenderse a un número finito pero arbitrario de variables, usando polinomios de varias variables.

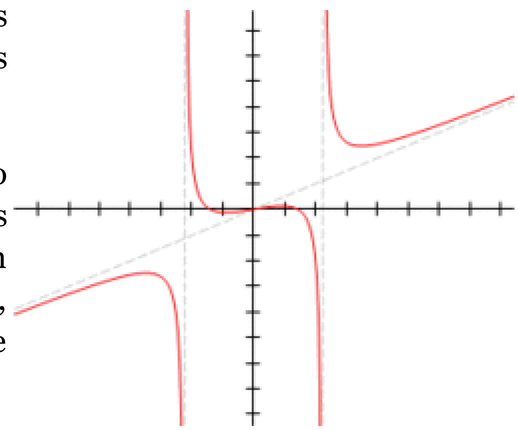
La palabra "racional" hace referencia a que la función racional es una *razón* o cociente (de dos polinomios); los coeficientes de los polinomios pueden ser números racionales o no.

Las funciones racionales tienen diversas aplicaciones en el campo del análisis numérico para interpolar o aproximar los resultados de otras funciones más complejas, ya que son computacionalmente simples de calcular como los polinomios, pero permiten expresar una mayor variedad de comportamientos.



Función racional de grado 2:

$$y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$$



Función racional de grado 3:

$$y = \frac{x^3 - 2x}{2(x^2 - 5)}$$

Índice

Ejemplos

Función homográfica:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

si el denominador es distinto de cero, y si ad ≠ bc, la curva correspondiente es una hipérbola equilátera.[1]

Propiedades

- Toda función racional es de clase C^∞ en un dominio que no incluya las raíces del polinomio $Q(x)$.
- Todas las funciones racionales en las que el grado de Q sea mayor o igual que el grado de P tienen asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas).
- Todas las funciones racionales cuyos coeficientes pertenecen a un cuerpo forman un cuerpo que incluye al cuerpo base como subcuerpo. El cuerpo de funciones racionales forma un subcuerpo del cuerpo de series de potencias formales.

Integración de funciones racionales

Dada una función racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Si el denominador es un polinómico mónico $Q(x)$ con k raíces diferentes, entonces admitirá la siguiente factorización en términos de polinomio irreducibles:

$$\begin{cases} Q(x) = (x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\dots(x-r_k)^{m_k}(x^2+s_1x+t_1)^{n_1}\dots(x^2+s_lx+t_l)^{n_l} \\ k, l, m_i, n_j \in \mathbb{N},\ r_p, s_p, t_p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $\mathbf{gr}(P) < \mathbf{gr}(Q)$ entonces la función racional puede escribirse como combinación lineal de fracciones racionales de las formas:

$$\begin{matrix} f_1(x) = \dfrac{1}{(x-r_i)} & f_2(x) = \dfrac{1}{(x-r_i)^u} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2} & f_4(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^v} \\ f_5(x) = \dfrac{x}{x^2+a^2} & f_6(x) = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^w} \end{matrix}$$

Por lo que la integral de la función $f_i(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma $F_i(x)$:

$$\begin{matrix} F_1(x) = \ln(x-r_i) & F_2(x) = \dfrac{1-u}{(x-r_i)^{u-1}} \\ F_3(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} & F_4(x) = \dfrac{1}{2a^2}\left(\dfrac{x}{(v-1)(x^2+a^2)^{v-1}} + \dfrac{2v-3}{v-1}\displaystyle\int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{v-1}}\right) \\ F_5(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) & F_6(x) = \dfrac{-1}{2(w-1)(x^2+a^2)^{w-1}} \end{matrix}$$

Obsérvese que lo anterior implica que las funciones racionales constituyen un cuerpo algebraico que es cerrado bajo la derivación, pero no bajo la integración.

Véase también

- Fracción parcial
- Asíntota

- Función elemental
  - Función algebraica
    - Función potencial
      - Función polinómica
      - Función racional
    - Radicación
  - Función trascendente
    - Función trigonométrica
    - Función exponencial
    - Logaritmo

Referencias

1. Pedro Pérez Carreras. *Cálculo infinitesimal* (http://books.google.com/books?id=XGrILRo8GmsC&lpg=PA58&dq=funci%C3%B3n%20homogr%C3%A1fica&hl=es&pg=PA58#v=onepage&q=funci%C3%B3n%20homogr%C3%A1fica&f=false). Universidad Politécnica de Valencia.