Periodo 2

Interpretación de diagramas con conjuntos

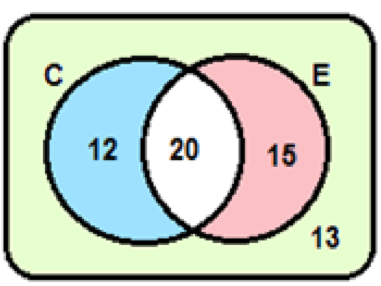
Para interpretar diagramas con conjuntos se debe analizar cuál es el conjunto universal o el total de elementos de los que se está hablando y qué representa cada una de las partes o secciones que se forman.

Diagramas de Venn

Se conocen con este nombre debido a que fueron inventados por el matemático y lógico británico John Venn y se utilizan para mostrar relaciones entre dos o más conjuntos pertenecientes a un conjunto mayor o universal.

Ejemplo 1

*se hizo una encuesta a un grupo de estudiantes, sobre la liga de fútbol que generalmente ven en sus casas, obteniéndose los resultados mostrados en el diagrama de Venn, donde **C** representa los estudiantes que les gusta ver los partidos de la liga de fútbol colombiana y **E** de la liga de fútbol española.*



Interpretación de las partes del diagrama de Venn

* Estudiantes que les gusta ver la liga colombiana
12 + 20 = **32**

* Estudiantes que les gusta ver sólo la liga colombiana
12

* Estudiantes que les gusta ver la liga española
20+15 = **35**

* Estudiantes que les gusta ver sólo la liga española
15

* Estudiantes que no les gusta ninguna de las dos ligas, (ni la española, ni la colombiana).
13

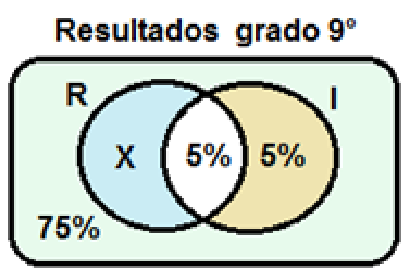
* Estudiantes que les gusta ver ambas ligas
20

* Total de estudiantes encuestados
12 + 20 + 15 + 13 = **60**

* Estudiantes que ven alguna de las dos ligas
12 + 20 + 15 = **47**

Ejemplo 2

Al finalizar el año escolar la comisión de evaluación y promoción del grado 9° se reúnen para analizar, según los resultados académicos del quinto informe académico, que estudiantes pierden por rendimiento académico (R) y que estudiantes por inasistencia (I), obteniéndose los siguientes resultados.



¿Qué inferencias se pueden hacer del diagrama de Venn representado en la gráfica?

Solución

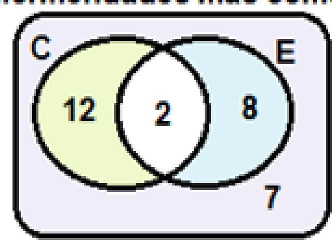
A partir del análisis del gráfico se puede inferir que

a. Pierden por rendimiento académico: **<u>20%</u>**
b. Pierden sólo por rendimiento académico: **<u>15%</u>**
c. Pierden por inasistencia: **<u>10%</u>**
d. Pierden sólo por inasistencia: **<u>5%</u>**
e. Pierden por ambas cosas: **<u>5%</u>**
f. No pierden el año: **<u>75%</u>**

Ejemplo 3

El gráfico representa el número de estudiantes que se enfermaron durante una semana, por cefalea (C), dolor de estómago (E) u otras enfermedades. Según el reporte de coordinación académica

Enfermendades más comunes



Determinar el porcentaje de estudiantes reportados con dolor de estómago.

Solución

Como son 10 estudiantes reportados con dolor de estómago de un total de 29, para pasar este valor a porcentaje se pueden seguir, entre otras, las siguientes estrategias.

Solución por regla de tres

100% 29 est.
X 10 est.

$$29x = 10 \times 100\%$$

$$x = \frac{10 \times 100\%}{29}$$

$$x = 34{,}4\%$$

Solución por conversión de fracción a porcentaje.

$$\frac{10}{29}\,del\ total$$

$$\frac{10}{29} \times 100\%$$

$$\frac{10 \times 100\%}{29}$$

$$34{,}4\%$$

Esto es, el 34,4 % de los reportados tuvieron dolor de estómago.

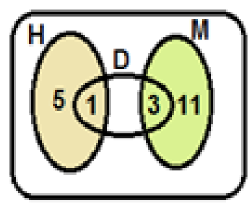
Queda como ejercicio determinar los otros porcentajes necesarios para representar la información inicial en un diagrama de Venn, con porcentajes.

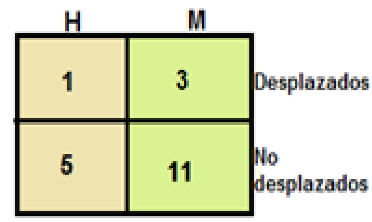
Diagramas con conjuntos disjuntos

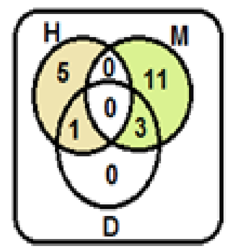
Aunque para situaciones donde hay conjuntos disjuntos se pueden representar con círculos separados o colocando en la parte de la intersección el símbolo vacío, también se puede separar el conjunto universal por medio de líneas, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

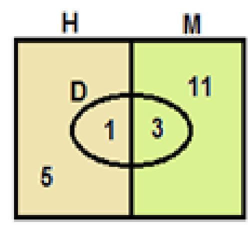
A una reunión asistieron 20 padres de familia, 6 hombres y 14 mujeres. Al averiguar sobre las familias desplazadas, de los hombres sólo había un padre de familia desplazado y de las mujeres 3.

Cuáles de los siguientes diagramas representan adecuadamente la situación planteada.





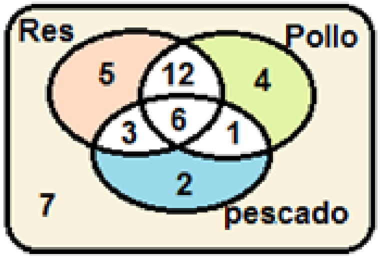




Solución.
Todos los diagramas utilizados son válidos, incluso existirían muchas otras formas de representar la misma información.

Ejemplo 4

Doña Rosmira quiere montar un restaurante en el barrio, para lo cual hizo un estudio previo a un grupo de personas sobre los tipos de carne que más le gustan y se obtuvieron los siguientes resultados.



1. Interpretar qué representa cada número, a partir de observar a qué conjunto o conjuntos pertenece.

* A 5 personas sólo le gusta la carne de res

* A 3 personas les gusta la carne de res y la de pescado pero no la de pollo.

* A 6 personas les gusta las tres carnes.

* A 7 personas no les gusta ninguna de las tres carnes.

El resto de los números se dejan como actividad para el estudiante.

2. interpretar lo que representan las posibles intersecciones entre dos conjuntos.

- El 12 y el 6 pertenecen a la intersección del conjunto de res y de pollo, esto es están tanto en el de res como en el de pollo, por tanto se deduce que a 18 personas les gusta la carne de res y la de pollo.

El resto de las intersecciones se dejan como actividad para el estudiante.

3. Interpretar que representan la unión dos o más conjuntos.

- Juntando todos los elementos de los conjuntos de res y de pollo (5 + 12 + 6 + 3 + 4 + 1) se deduce que a 31 personas les gusta la carne de res o la de pollo.

Interpretar las demás uniones posibles

Teoría de números

Números primos y compuestos

Un número es primo si sólo se puede dividir por uno y por sí mismo, si tiene más divisores se dice que el número es compuesto.

Practica:

1. Escribir los números compuestos hasta el 50

2. Escoger un número entre 60 y 70 y expresarlo como la suma de
a. Dos números primos
b. tres números primos

3. Escriba falso o verdadero según corresponda

a. Todo número primo mayor de 2 es impar
b. Todo número compuesto es divisible por dos
c. El número 571 no es compuesto ni primo

4. ¿Qué numero primo tiene dos dígitos que sumados dan 14?

Criterios de divisibilidad

Un número es divisible

Por 2: Si termina en dígito par o cero. Ejemplo: 125<u>0</u> , 1085<u>6</u>

Por 3: Si la suma de los dígitos es múltiplo de tres. Ejemplo: 36 , 13575

Por 5: Si termina en dígito cinco o cero. Ejemplo: 35<u>5</u>, 48<u>0</u>

Por 7: Si el número formado al quitar el último dígito menos el último dígito multiplicado por dos es múltiplo de siete. Ejemplo: 203 porque $20 - 3 \times 2 = 14$ y 14 es múltiplo de siete.

Por 11: si al sumar los dígitos en posición impar y restarles la suma de los dígitos en posición par da múltiplo de 11 o cero: ejemplo: 231 porque $(2+1) - 3 = 0$
8085 porque $(8+8)-(0+5) = 11$

Teorema fundamental de la aritmética

"Todo número se puede descomponer en factores primos"

Para descomponer un número en sus factores primos se utilizan los criterios de divisibilidad, ejemplo:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2x2x3x3$
$= 2^2x3^2$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2x2x3x5$
$= 2^2x3x5$

Múltiplos de un número y mínimo común múltiplo

Los múltiplos de un número es el conjunto resultante de multiplicar dicho número por los números naturales, este conjunto es infinito. Ejemplo:

M_3 = {3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33…}

M_4 = {4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, 36, 40, 44…}

¿Cuáles son los múltiplos comunes? ¿Cuál es el menor de todos?

Si extiende cada conjunto se encontraran infinitos múltiplos comunes, el menor de todos ellos es 12, es decir, el mínimo común múltiplo es 12

> *Nota: el menor de los múltiplos comunes de dos o más números se conoce con el nombre de mínimo común múltiplo (m.c.m)*

Un método abreviado para hallar el m.c.m es utilizando la descomposición en factores primos de manera simultánea.

Se colocará una recta vertical al frente de los números a descomponer.

Al frente de los números se colocara el factor o número por el cual se van a dividir (mitad, tercera, quinta, etc.) y debajo de los números los resultados de las respectivas divisiones, teniendo en cuenta que, si algún número no tiene división exacta, en vez de colocar su resultado debajo, se coloca el mismo número.

Con los resultados se repite el mismo proceso anterior y se sigue repitiendo el proceso hasta que los resultados sean todos 1.

Por último, los factores que quedan a la derecha de la línea, se multiplican entre sí y el resultado será el mínimo común múltiplo.

Ejemplo 1

Hallar el m.c.m entre 6 y 8

Solución.

Utilizando el método de la descomposición simultánea de los números 8 y 8 se obtiene lo siguiente.

8	6	2
4	3	2
2	3	2
1	3	3
1	1	

Por tanto el **m.c.m** = 2x2x2x3 = 24

Ejemplo 2

Fernando y Mary son hermanos que viven en un pueblo cerca a Medellín. Fernando viaja a Medellín cada 8 días por asuntos de trabajo y su hermana Mary cada 20 días por asunto de estudio. El 1 de marzo los dos salieron juntos para Medellín en el carro de Fernando.

A. ¿Cada cuánto tiempo pueden viajar juntos para Medellín?

B. ¿Cuál será la fecha, de la próxima vez que viajen nuevamente juntos, si marzo tiene 31 días?

Solución parte a

Para determinar cada cuanto tiempo dos eventos que inician simultáneamente vuelven a coincidir, se utiliza el mínimo común múltiplo.

Utilizando el método de la descomposición simultánea se obtendría

8	**20**	**2**
4	**10**	**2**
2	**5**	**2**
1	**5**	**5**
1	**1**	

m.c.m = 2 x 2 x 2 x 5 = 40

De lo que se deduce que volverán a viajar juntos cada 40 días.

Solución parte b

Como el día en que viajaron juntos era el 1 de marzo hasta llegar a marzo 31 pasarían 30 días, y como se encuentran a los 40 días, quedarían faltando 10 días más del mes de abril, esto es vuelve a viajar juntos el 10 de abril.

Divisores de un número y máximo común divisor

Los divisores de un número, es el conjunto formado por todos los números por los que es posible dividir dicho número exactamente.

Ejemplo: 1

Hallar los divisores comunes de 24 y 18 y luego hallar el mayor de ellos

Solución
Identificando que números son divisores o factores de cada número, desde el 1 hasta la mitad del número e incluyendo el mismo número al final se obtiene lo siguiente.

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Los divisores comunes son {1, 2, 3, 6} siendo el mayor de todos el número 6, esto es, el máximo común divisor es 6

Al mayor de los divisores comunes de dos o más números se le conoce como Máximo Común Divisor (M.C.D)

Para hallar el máximo común divisor entre dos o más números, también existen varios métodos, uno de ellos es el descomponer en factores primos comunes o en su defecto, hacer la misma descomposición simultanea que para hallar el mínimo común múltiplo, pero sólo se tendrán en cuenta los factores comunes (que dividen a todos).

El máximo común divisor será la multiplicación de estos factores comunes.

Ejemplo 2

Hallar el máximo común divisor de 12 y 18

Solución
Descomponiendo los números 12 y 18 y señalando sólo los factores comunes (los que dividen a todos), se obtiene lo siguiente

12	18	2*
6	9	2
3	9	3*
1	3	3
1	1	

Por tanto el **M.C.D = 2 x 3 = 6**

Esto es, el mayor número que los divide a todos es el 6

El máximo común divisor se utiliza cuando se quiere repartir o dividir dos o más magnitudes dadas en partes iguales, pero del mayor tamaño posible

Ejemplo 3

Karen compra 12 metros de tiras decorativas de color azul y 16 metros de color rojo. Para dividirlas en pedazos del mismo tamaño de forma exacta, sin que sobre ni falte tira.

¿Cuánto medirá cada pedazo de tira? ¿Cuántos pedazos de tiras saldrán?

Solución

Como se pide dividir 12 metros y 16 metros, en pedazos iguales del mayor tamaño posible, se está pidiendo el máximo común divisor.

12	16	2*
6	8	2*
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

M. C. D = 2 x 2 = 4 metros

Por lo que se deduce, que el pedazo de tira más grande que se puede cortar, es de 4 metros.

De la tira de 12 metros de color azul saldrán 3 pedazos y de la de 16 metros de color rojo saldrán 4 pedazos, para un total de 7 pedazos de igual medida.

Ejemplo 4

Una empresa de gaseosas tiene en el mercado un producto en dos presentaciones de 3000 cm^3 y de 3500 cm^3, como el producto se está vendiendo mucho, la empresa quiere sacar un tercer empaque más pequeño, de tal forma que los empaques grandes puedan llenar exactamente cierta cantidad de estos pequeños. ¿Cuál es la capacidad máxima que puede tener este nuevo empaque? ¿Cuántos empaques de estos pequeños se podrían llenar con cada uno de los empaques grandes?

Solución:

En sí, lo que se pide es buscar el número mayor por el que se pueda dividir a 3000 y a 3500. (Máximo divisor de ambos números).

3000	3500	2*
1500	1750	2*
750	875	2
375	875	3
125	875	5*
25	175	5*
5	35	5*
1	7	7
1	1	

M.C.D = 2 x 2 x 5 x 5 x 5 = 500

Esto es, el empaque pequeño de mayor capacidad que se puede fabricar, que quepa exactamente en los dos iniciales, sería uno de 500 cm^3.

Ejemplo 5

Un terreno rectangular de 12 metros de ancho por 20 metros de largo, se va a dividir en cuadrados de la mayor mediad posible, para colocar en cada esquina de los cuadrados un árbol. ¿Cuál sería la media de cada lado? ¿Cuántos árboles en total se sembrarían?

Solución

Para que un cuadrado quepa tanto a lo largo como a lo ancho de forma exacta, debe ser divisor o factor de ambos lados, tanto de 12 metros y como de 20 metros, y como es el mayor cuadrado posible, se pide entonces, el máximo común divisor de 12 y 20.

12	20	2*
6	10	2*
3	5	3
1	5	5
1	1	

M.C.D = 2 x 2 = 4

Esto es, la mayor medida posible, de un cuadrado, que quepa exactamente a lo largo y a lo ancho, es 4 metros.

Como se van a ubicar árboles cada 4 metros a lo largo, se pueden ubicar (20/4= 5) 5 partes, esto es, 5 árboles, más uno en el punto inicial, para un total de 6 árboles en una fila a lo largo.

De igual forma el ancho que es 12 metros se divide en 3 partes, esto se pueden ubicar 3 árboles, más uno en el punto inicial serian 4 árboles a lo ancho.

En conclusión se podrían sacar 4 filas, con 6 árboles cada una. (4 x 6) 24 árboles, tal como se ilustra en la figura.