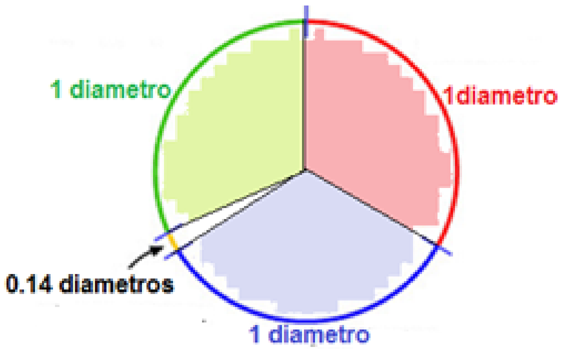
RAZONAMIENTO 10° PERIODO 2

Conversiones entre grados y radianes

Teniendo en cuenta que el diámetro cave aproximadamente (3.14 veces) en toda la circunferencia (perímetro/diámetro = 3,14), como esta relación siempre se cumplía se le dio el nombre de π . A continuación se muestra gráficamente esta importante relación geométrica.



De lo anterior se puede deducir lo siguiente

En una vuelta (360°) cave π veces el diámetro

$$360° \rightarrow \pi \ D$$

Como el diámetro son dos veces el radio (D = 2r) se puede cambiar la expresión anterior por la siguiente

$$360° \rightarrow 2\pi \text{ radio}$$

Además como cada arco que mide un radio me genera un ángulo de 1 radian, (por definición de radian) esto implicaría si alrededor de una vuelta caben 2π veces el radio, también caben 2π radianes.

$$360° \rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

Por facilidad para la parte operativa se acostumbra trabajar con la mitad de esta relación

$$\mathbf{180° \rightarrow \pi \text{ rad}}$$

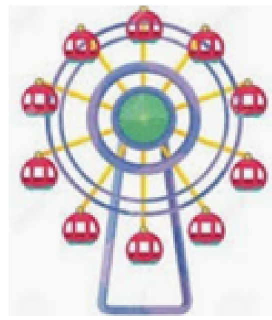
Para convertir de grados a radianes o de radianes a grados siempre se va a utilizar esta relación.

$$180° = \pi \text{ rad}$$

Lo cual significa que en media vuelta siempre caben π (3.14) radianes, En donde un radian es un ángulo central de 57,3° aproximadamente. .

Ejemplo 1

Una rueda de chicago tiene 10 soportes de cabinas, de 4 metros de longitud (r = 4m), colocados todos a la misma distancia alrededor de la rueda.



¿Cuál es el ángulo que se genera entre dos soportes continuos, expresado en radianes?

Solución

Como una vuelta completa tiene 360°, y esta se divide en 10 partes iguales, cada parte corresponde a (360/10) 36°

Para expresar esta medida angular en radianes, utilizando la regla de tres, se procede de la siguiente manera

$$\mathbf{180° \rightarrow \pi \text{ rad}}$$
$$\mathbf{36° \rightarrow X}$$

$$x = \frac{36° \times \pi rad}{180°}$$

Simplificando se obtiene

$$x=\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{2}{\cancel{\overset{18}{\cancel{36^\circ}}}}}}\times\pi rad}{\underset{5}{\cancel{\underset{10}{\cancel{\underset{90}{\cancel{180^\circ}}}}}}}$$

$$x=\frac{1}{5}\pi rad$$

Esto es el ángulo que separa dos soportes contiguos es de $\frac{1}{5}\pi rad$

Para hallar la longitud circular que los separa, como por cada radian, el arco mide un radio, la longitud pedida L. será igual a

$$L=\frac{1}{5}\pi\cdot r=\frac{1\times 3.14\times 4}{5}=\frac{12.56}{5}=2.51$$

La distancia o longitud de arco L, entre dos soportes es de 2,51 metros.

Nota: tenga en cuenta que la distancia entre dos puntos (línea recta) es diferente a la distancia medida alrededor de una circunferencia. (medida del arco)

Actividad propuesta para los estudiantes

El plano cartesiano dividido en cuatro partes o cuadrantes tiene las siguientes divisiones (90°, 180°, 270° y 360°)

Convertir estas medidas en radianes y graficar el plano cartesiano con los ejes expresados en radianes.

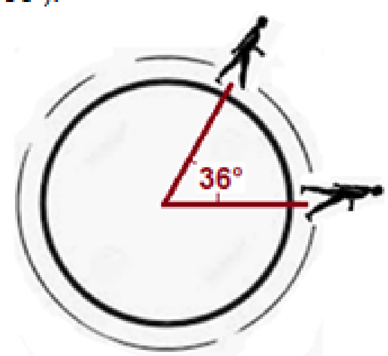
Área y longitud de un sector circular

Hallar la longitud de arco es prácticamente hallar la medida del ángulo en radianes ya que como cada radian mide un radio, una vez se conozca el ángulo del sector circular, basta con cambiar la unidad de medida radian por lo que mide un radio.

Para determinar el área de un sector circular, se halla el área del círculo completo y luego se determina la parte de círculo pedida, ya sea determinando la fracción del circulo correspondiente al sector circular o utilizando regla de tres mediante la relación entre ángulo del sector circular y área del sector circular, entre otras formas.

Ejemplo

En una pista circular de 50 metros de radio, mientras un competidor daba una vuelta a la pista a otro le faltaba 1/10 de vuelta (1/10 de 360° = 36°).



a. Determinar la distancia (longitud de arco) que le cogió de ventaja.
b. Determinar el área del sector circular formado en ese momento.

Solución parte a

Lo primero que se requiere para hacer conversiones entre dos unidades de medida es conocer la relación entre estas dos unidades.

Para este caso la relación es

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

De esta relación a su vez se puede deducir otras dos relaciones básicas, el valor de un grado en términos de radianes y el valor de un radian en términos de grados.

$$180^\circ=\pi\cdot rad \qquad\qquad 180^\circ=\pi\cdot rad$$

$$^\circ=\frac{\pi\cdot rad}{180^\circ} \qquad \text{ó} \qquad \frac{180^\circ}{\pi\cdot}=rad$$

Una forma entonces de convertir 36° a radianes, es cambiar el valor del grado por su valor en radianes.

$$36^\circ = 36\left(\frac{\pi \cdot rad}{180}\right) = \frac{36\pi \cdot rad}{180} = \frac{1}{5}\pi \cdot rad$$

Para determinar la medida del arco, como un radian, subtiende un arco de un radio, se puede cambiar la unidad de medida radian por la medida del radio, ya que una implica la otra.

$$36^\circ = \frac{1}{5}\pi \cdot rad = \frac{1}{5}\pi\,(50m.) = 10\pi\ m. = 31{,}4m$$

Esto es, le gano por 31,4 metros

Solución parte b

Para hallar el área de una parte del círculo es necesario saber el área total.

$$A_{círculo} = \pi \times r^2 = \pi \times 50^2 = 2500\pi\ \text{m}^2$$

Para determinar el área de un sector circular se puede hallar mediante fracciones teniendo en cuenta que fracción es 36° de una vuelta entera 360° o mediante regla de tres conociendo que 360° tiene un área de 2500 π m².

Solución con fracciones

$$\frac{36^\circ}{360^\circ} \times 2500\pi\ m^2$$

$$\frac{1}{10} \times 2500\pi\ m^2$$

$$\frac{2500\pi}{10}\ m^2$$

$$250\pi\ m^2$$

$$785\ m^2$$

Solución con regla de tres

una vuelta

$$360^\circ \to 2500\pi\ \text{m}^2$$

$$36^\circ \to x$$

$$x = \frac{36^\circ \times 2500\pi\ \text{m}^2}{360^\circ}$$

$$x = 1 \times 250\pi\ \text{m}^2$$

$$\text{x} = 250\pi\ \text{m}^2$$

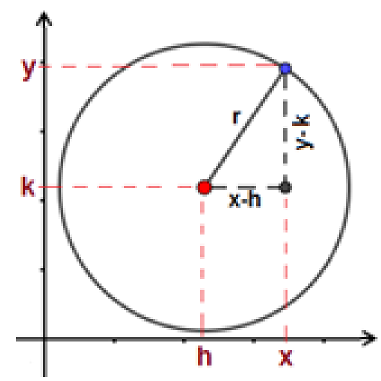
$$\text{x} = 785\ \text{m}^2$$

De lo que se deduce que el área correspondiente a un sector circular de 36° de abertura en un círculo de 50, metros es 785 m².

Geometría analítica del círculo

La circunferencia, línea curva que rodea al círculo, es está compuesta por todos los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro.

Cuando se grafica un círculo en un plano cartesiano con centro en (h, k) cada segmento que une el centro con un punto (x, y) de la circunferencia, se puede descomponer en un triángulo rectángulo, donde el cateto horizontal mide (x-h) y el vertical (y-k), tal como se muestra a continuación.



Al utilizar el teorema de Pitágoras se obtendría que

(Hipotenusa)² = (cateto horizontal)² + (cat. vertical)²

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Esta expresión que se conoce como ecuación canónica del círculo.

Ejemplo 1.

Una pista de atletismo tiene forma circular, de 18 metros de radio, si se ubica el centro de la pista, en el punto (0,0).

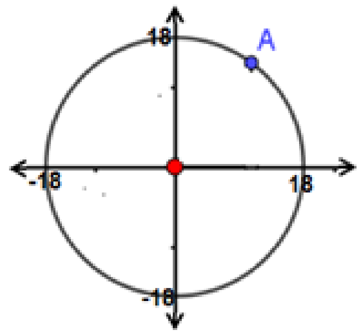
a. Representar la situación en el plano cartesiano y determinar la ecuación canónica que representa el círculo de dicha situación.

b. Determinar el área interna y el perímetro de la pista.

c. Una persona ha corrido un ángulo de 120°. Que distancia ha recorrido.

Solución parte a

Representación gráfica de un círculo con centro en (0,0) y 18 metros de radio



Reemplazando en la ecuación canónica del círculo los valores del centro (h, k) con h=0 y k = 0 y un radio de 18 metros, se obtiene lo siguiente.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2=18^2$$
$$x^2+y^2=324$$

Solución parte b

El área de un círculo se puede hallar mediante la expresión.

$$A=\pi\cdot r^2$$
$$A=3.14\times 324$$
$$A=1017{,}36m^2$$

EL perímetro del círculo se halla mediante la expresión.

$$A=2\cdot\pi\cdot r$$
$$A=2\times 3.14\times 18$$
$$A=113{,}04m$$

Solución parte c

Si por 360° recorre una distancia de 113.04 metros, cuanto recorrerá por un ángulo de 120°.

360° 113.04 metros
120° x

$$x=\frac{113.04\times 120^\circ}{360^\circ}=37{,}68metros$$

Ejemplo 2

La ecuación canónica de un círculo se representa mediante la expresión

$$(x-6)^2+(y+3)^2=25$$

Determinar el centro y el radio del círculo y representar su gráfica.

Solución.

La ecuación canónica de un círculo es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Comparando esta ecuación canónica con la ecuación dada

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-6)^2+(y+3)^2=25$$

Se puede deducir lo siguiente

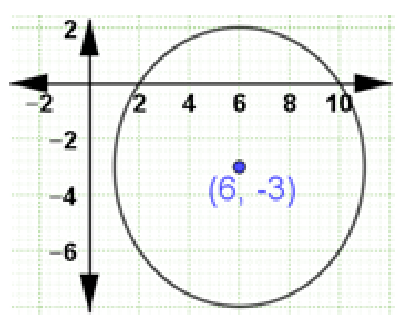
$$(x-\overset{h}{6})^2+(y+\overset{-k}{3})^2=\overset{r^2}{25}$$

Como h es el número que acompaña a x después del signo negativo, se deduce que **(h= 6).** En el caso de k, para haber cambiado el signo menos que tiene la fórmula al signo más, el k tiene que ser también negativo, ya que es la única manera de convertir el signo negativo a positivo, esto es **(k =-3).** Por lo que el centro de la elipse **(h, k)** es **(6, -3)**

Para determinar el radio, como en la formula el radio esta elevado al cuadrado, un número que elevado al cuadrado es 5, es **r= 5**

Grafica

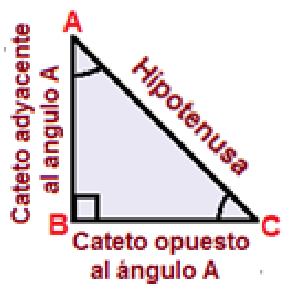
Como el centro es **(6, -3)** y el radio **5** la gráfica resultante sería la siguiente.



Razones trigonométricas

Una razón es una relación entre dos magnitudes. Las razones trigonométricas son las posibles relaciones que se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo respecto a un ángulo determinado. A cada una de estas relaciones o razones le fue asignado un nombre (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente).

Llamando al lado opuesto del ángulo recto como hipotenusa y a los lados que forman este ángulo recto como catetos, se pueden formar 6 relaciones en relación a cada ángulo agudo.



Respecto al ángulo A se pueden establecer las siguientes 6 relaciones.

1. $Seno A = \dfrac{\text{cateto opuesto a A}}{\text{Hipotenusa}}$

2. $Coseno A = \dfrac{\text{Cateto adyacente a A}}{\text{Hipotenusa}}$

3. $Tangente A = \dfrac{\text{Cateto opuesto a A}}{\text{Cateto adyacente a A}}$

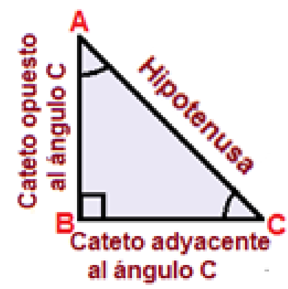
4. $\text{Cosecante} A = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a A}}$

5. $Secante A = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a A}}$

6. $\text{Cotangente A} = \dfrac{\text{Cateto adyacente a A}}{\text{Cateto opuesto A}}$

Nota: Usualmente se utilizan las tres primeras relaciones o razones ya que las otras tres son las mismas, pero intercambiando los términos del numerador y el denominador. A estas tres razones se les denomina reciprocas.

Tomando como referencia el ángulo B se obtendrían también 6 relaciones posibles.



1. $Seno C = \dfrac{\text{cateto opuesto a C}}{\text{Hipotenusa}}$

2. $Coseno C = \dfrac{\text{Cateto adyacente a C}}{\text{Hipotenusa}}$

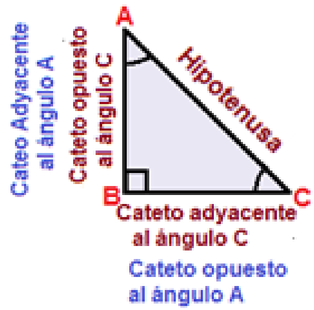
3. $Tangente C = \dfrac{\text{Cateto opuesto a C}}{\text{Cateto adyacente a C}}$

4. $\text{Cosecante} C = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a C}}$

5. $Secante C = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a C}}$

6. $\text{Cotangente C} = \dfrac{\text{Cateto adyacente a C}}{\text{Cateto opuesto C}}$

Si observamos de manera simultánea las posibilidades con los ángulos A y C, podríamos deducir lo siguiente.



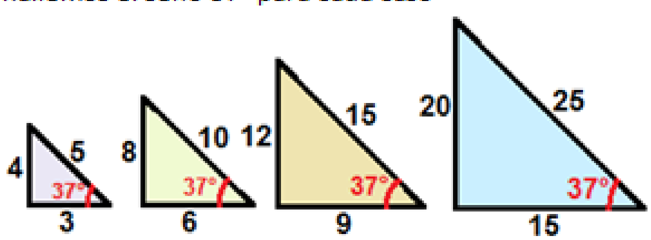
$SenoA = CosenoC$
$SecanteA = \text{CosecanteC}$
$TangenteA = \text{CotangenteC}$

Estas razones se conocen como razones trigonométricas completarías (por ser ángulos complementarios) y siempre serán iguales.

Razones trigonométricas para ángulos notables

Después de identificar los diferentes tipos de razones trigonométricas que existen, la importancia de estas radica en que en todos los triángulos semejantes, por ejemplo, los triángulos rectángulos que tengan un ángulo de 30°, la relación de dos lados determinados, conservando el mismo orden, siempre dan lo mismo.

Observemos un triángulo rectángulo muy conocido y hallemos el seno 37° para cada caso



$\frac{4}{5}$ $\quad$ $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}$ $\quad$ $\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}$ $\quad$ $\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}$

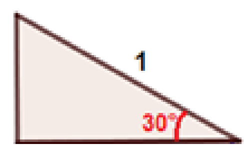
Al simplificar la razón de seno37° (cateto opuesto sobre hipotenusa respecto al ángulo de 37°), en todos los triángulos semejantes siempre da el mismo resultado y si se siguieran construyendo triángulos semejantes, no importa si son rotados, trasladados, ubicados en el plano cartesiano, etc. Siempre daría la misma razón.

De lo que se concluye que seno (37°) sin importar el triángulo rectángulo que sea, siempre va a dar 0,8.

Para la trigonometría es muy importante conocer las razones trigonométricas de algunos ángulos que son usados con mucha frecuencia, porque a partir de estos pueden hallar otros valores.

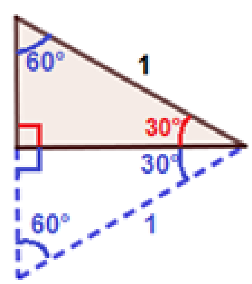
Razones trigonométricas para ángulos notables de 30° y 60°

Como las razones trigonométricas van a ser las mismas para cualquier triangulo rectángulo semejante (en este caso los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 30°), se va a escoger el caso más simple que es cuando la hipotenusa tiene un valor de 1.

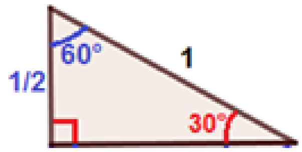


Al completar el ángulo faltante, este debe medir 60°, ya que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo de ser 180°.

Si además se dibuja un triángulo igual al inicial por el cateto adyacente al ángulo de 30°, se obtiene el siguiente gráfico.



El triángulo grande formado es equilátero ya que tiene todos sus ángulos iguales y por tanto también debe tener todos sus lados iguales, esto es, deben medir 1, lo que implica que el cateto opuesto al ángulo inicial de 30° mide la mitad (1/2).



Para hallar el lado faltante se pude utilizar el teorema de Pitágoras

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (cat.\text{opuesto})^2 + (cat.\text{adyacente})^2$$

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

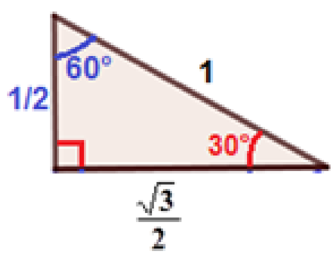
$$1 = \frac{1}{4} + x^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{x^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = x$$

Con este resultado se completan las medidas de todos los lados, por lo que se pueden hallar todas las razones trigonométricas para el ángulo de 30° y el de 60°, aunque es suficiente con trabajar las tres primeras razones (seno, coseno y tangente)



$$Sen(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \qquad Sen(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos(30°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad Cos(60°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$Tan(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad Tan(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$Tan(30°) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad Tan(60°) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

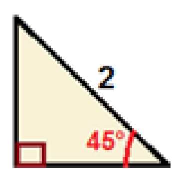
$Sen(30°) = \frac{1}{2}$ Significa que para cualquier triangulo rectángulo de 30°, la relación o razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa va a ser 1/2.

Las demás interpretaciones son similares.

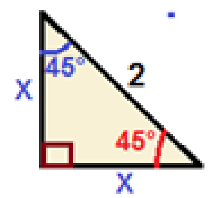
Razones trigonométricas para el ángulo de 45°

De manera similar al punto anterior, con tal de encontrar almenos la relación de uno de los infinitos triángulos rectángulos posibles, todos los demás cumplirán las mismas relaciones.

Para no trabajar otra vez como en el ejemplo anterior, tomando la medida de la hipotenusa igual a 1, en este caso tomaremos un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, pero cuya hipotenusa mida 2, aunque realmente puede ser cualquier número ya que al final las relaciones o razones trigonométricas al simplificarse dan lo mismo.



El ángulo faltante es también de 45°, pues la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo debe ser 180°, por lo que se genera un triángulo isósceles y en consecuencia los dos catetos deben medir lo mismo (x).



Para hallar el lado faltante se utilizara nuevamente el teorema de Pitágoras

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (cat.\text{opuesto})^2 + (cat.\text{adyacente})^2$$

$$2^2 = x^2 + x^2$$

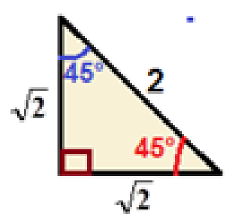
$$4 = 2x^2$$

$$\frac{4}{2} = x^2$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{2} = x$$

Con este proceso se completan todas las medidas de los lados faltantes.



Por lo que se pueden obtener las razones trigonométricas para este triángulo y cualquier otro triangulo rectángulo semejante (que tenga un ángulo de 45°)

$$Sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Tan(30°) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Interpretación del resultado Cos (45°)= 1/2

Para cualquier triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, la razón o relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa a dicho ángulo siempre va a ser (1/2)

Las demás razones trigonométricas se interpretan de forma similar.

El resumen de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° se presenta en la siguiente tabla

	Seno	Coseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Aplicaciones de las razones trigonométricas

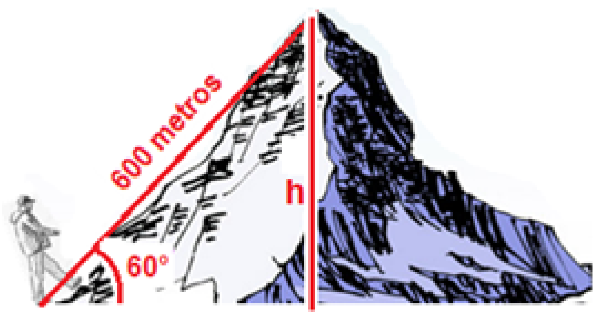
En el teorema de Pitágoras la ecuación formada consta de tres lados, por tanto para resolver dicha ecuación se deben conocer dos de los tres lados.

En el caso de las razones trigonométricas se forma una ecuación con dos lados y un ángulo, por tanto se deben conocer ya sea un lado y un ángulo para hallar el lado faltante o dos lados para hallar el ángulo faltante, pues como en toda ecuación, para resolver ésta, sólo debe haber una incógnita.

Ejemplo: 1

Medidas de distancias de forma indirecta

Una montaña tiene una inclinación de aproximadamente 30° y la distancia que tiene que recorrer una persona para subirla es de 1200 metros. Si al inicio de la montaña se está a una altura 1400 metros sobre el nivel del mar. ¿Cuál será la altura con respecto al nivel del mar en el ´punto más alto de la montaña?



Solución

Del triángulo rectángulo que se forma al trazar la trayectoria de subida, la altura y el piso, se conoce el ángulo de elevación de la montaña (60°), la hipotenusa (600 metros) y se desconoce la altura de la montaña (h).

Una razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) que me relacione la **hipotenusa** (lado conocido) con la **altura** (lado pedido), es el seno, por lo cual esta será la razón trigonométrica que debemos escoger, ya que sólo quedaría la altura h de incógnita.

$$Sen(60°) = \frac{\text{cateto opuesto a } 60°}{\text{Hipotenusa}}$$

$$Sen(60°) = \frac{h}{600}$$

Despejando h se obtiene

$$600Sen(60°) = h$$

Como sen $(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ al remplazar en la ecaución queda

$$600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$

$$300\sqrt{3} = h$$

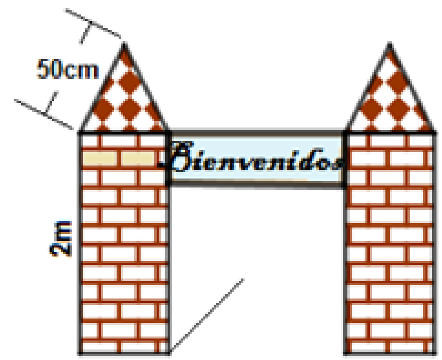
El punto más alto de la montaña estaría a

$$\left(1400 + 300\sqrt{3}\right) metros$$

Ejemplo 2

Aplicaciones en áreas

En la entrada de una hacienda hay un portón cuyo frente tiene la siguiente forma.

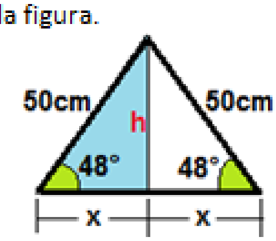


Si los dos pilares que sostienen el letrero de bienvenida son iguales y el triángulo superior de los pilares es isósceles cuyos ángulos de la base miden 50 °, ¿cuál es el área frontal de los pilares, incluyendo la parte triangular?

Solución.

Para calcular el área del triángulo y del rectángulo se debe conocer la base y la altura de cada uno.

Para hallar la base del triángulo que es la misma base del rectángulo, se traza la altura sobre el triángulo formado en la parte superior del portón, la cual cae en la mitad de la base por ser triangulo isósceles, tal como se muestra en la figura.



Como no se puede utilizar el teorema de Pitágoras ya que aunque es un triángulo rectángulo se tendría que conocer dos lados y sólo se conoce uno, se utilizan las razones trigonométricas para las cuales sólo se necesita conocer un lado y un ángulo.

Tomando como referencia el triángulo de la izquierda que se forma al trazar la altura, el lado conocido es la **hipotenusa (50 cm)**

A partir de este dato conocido se puede hallar cualquiera de los otros dos lados.

Para hallar por ejemplo la base x (**cateto adyacente**) la razón que me serviría por que relaciona el lado pedido (cateto adyacente) y el lado conocido (hipotenusa) es

$$Cos(48°) = \frac{\text{cateto adyacentea } 48°}{\text{Hipotenusa}}$$

$$Cos(48°) = \frac{x}{50}$$

$$50Cos(48°) = x$$

$$33{,}5 = x$$

Y como la base del triángulo es 2x, la medida de esta sería **67cm** aproximadamente

De igual forma que el anterior, al conocer la **hipotenusa** y querer hallar el **cateto opuesto,** la razón trigonométrica que relaciona estos dos datos es el seno, por tanto.

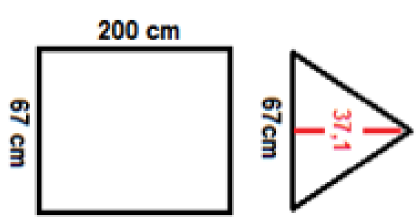
$$Sen(48°) = \frac{\text{cateto opuesto a } 48°}{\text{Hipotenusa}}$$

$$Sen(48°) = \frac{h}{50}$$

$$50Sen(48°) = h$$

$$37{,}1 = h$$

Teniendo las medidas de las bases y las alturas del triángulo y del rectángulo, solo queda proceder a determinar sus áreas.



Conocidas la base y la altura de cada figura, se procede a determinar sus áreas.

$$A_{triángulo} = \frac{67cm \times 37{,}1cm}{2} = \frac{2485{,}7}{2} = 1242{,}85cm^2$$

$$A_{rectángulo} = 67cm \times 200cm = 13400cm^2$$

Luego el área frontal de cada pilar es

1242,85 cm^2 + 13400 cm^2 = **14642,85 cm^2**

Descomposición de vectores

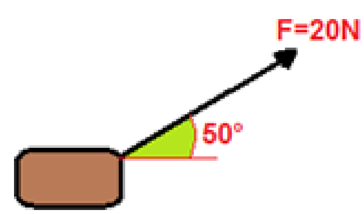
Un vector es una magnitud acompañada de una unidad de medida y una dirección (ángulo). Son muy utilizados desde la física para interpretar fenómenos y hacer inferencias a partir de su interpretación. Sin embargo en estos ejemplos sólo se pretende mostrar la descomposición de un vector en sus componentes rectangulares utilizando las razones trigonométricas.

Al igual que en un plano cartesiano se puede descomponer cualquier segmento en una componente horizontal y una vertical formando un triángulo rectángulo, cualquier vector también se puede descomponer en un triángulo rectángulo.

Ejemplo 3

Descomposición de un vector fuerza

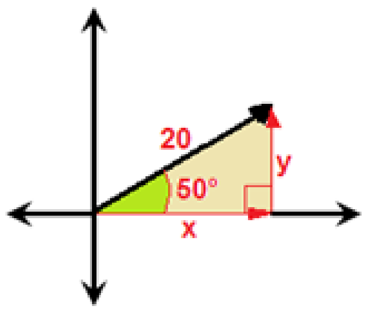
Se está halando un objeto por el piso con un laso. La fuerza aplicada es de 20 Newton y el ángulo de aplicación de la fuerza es de 50°.



Representar la situación en un diagrama de cuerpo libre (plano cartesiano) y descomponer sus fuerzas a partir de las razones trigonométricas.

Solución

Al descomponer el vector en un triángulo rectángulo se obtiene lo siguiente.



Para hallar el valor de x, como dan la **hipotenusa** y se quiere hallar el **cateto adyacente** se utilizara la razón del coseno, que es la que relaciona estos dos lados.

$$Cos(50°) = \frac{Cateto \text{ adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$Cos(50°) = \frac{x}{20}$$

$$20Cos(50°) = x$$

Para hallar el valor de Y (**cateto opuesto),** conociendo el valor de la **hipotenusa,** se requiere utilizar la razón del seno, que es la que me relaciona estos dos lados.

$$Sen(50°) = \frac{Cateto \text{ opuestoe}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$Sen(50°) = \frac{y}{20}$$

$$20Sen(50°) = y$$

De anterior se concluye que para cualquier vector que se descomponga,

Cateto opuesto = hipotenusa x seno del ángulo

Cateto adyacente = hipotenusa x coseno del ángulo

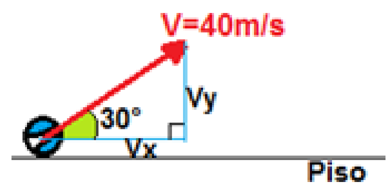
Ejemplo 4

Descomposición del vector velocidad

Una pelota se patea con una velocidad inicial de 40 metros por segundo. Si el ángulo con que salió la pelota fue de 30°. Determinar la velocidad de avance inicial (Vx) y la velocidad inicial de subida (Vy).

Solución

Haciendo la descomposición gráfica del vector velocidad inicial, en las componentes rectangulares, se obtendría lo siguiente.



Como por teoría de razones trigonométricas se sabe que

Cateto opuesto = hipotenusa x seno del ángulo

Cateto adyacente = hipotenusa x coseno del ángulo

Vy = 40 x sen (30°) = 40 x 0.5 = 20 m/s

Vx = 40 x cos (30°) = 40 x 0,87 = 34,8 m/s

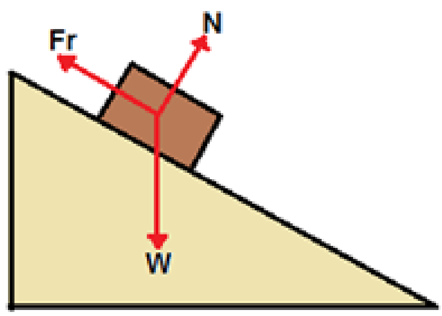
De lo que se deduce que la velocidad de avance horizontal es de 20 m/s, mientras que la velocidad de avance vertical o de subida es de 34,8 m/s.

Nótese, que no se puede decir que la velocidad inicial es la suma escalar de la velocidad horizontal (Vx) y la velocidad vertical (Vy), porque hablar de vectores y hablar de escalares son dos cosas diferentes.

Ejemplo 5

(Fuerzas en un plano inclinado)

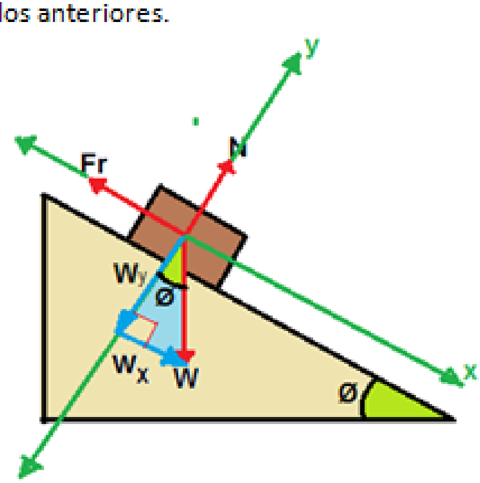
Un bloque se desliza por un plano inclinado, sobre este actúan la fuerza normal (N) perpendicular al desplazamiento, la fuerza de rozamiento en sentido contrario del desplazamiento (Fr) y el peso del objeto que siempre es perpendicular al piso.



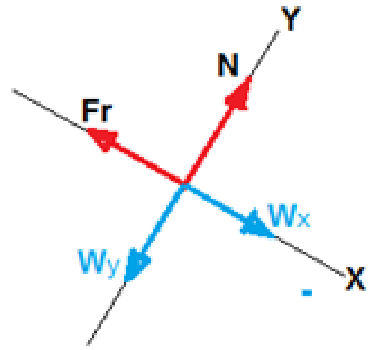
Hallar el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el bloque.

Solución.

En física se recomienda hacer el plano cartesiano en relación al movimiento del objeto, por lo que la normal coincidiría con el eje vertical al igual que la fricción con el eje horizontal y por tanto la única que quedaría faltando para descomponerla en dirección de los ejes sería el peso del objeto w, tal como se ha hecho en los ejemplos anteriores.



Como la idea es dejar todas las fuerzas ubicadas en los ejes (X) y (Y), para ubicar la fuerza del peso en los ejes, una vez descompuesto dicho vector fuerza se colocan los catetos del triángulo rectángulo resultante en la dirección que indiquen sus flechas, tal como se muestra a continuación.



Conociendo que como (**Wx**) es el cateto opuesto al ángulo Ø y Cateto opuesto = hipotenusa x seno del ángulo, se obtiene que

Wx = W cos (Ø)

De forma similar, como Wy es el cateto adyacente al ángulo Ø, se obtiene que

Cateto adyacente = hipotenusa x coseno del ángulo

Wy = W Sen (Ø)

El análisis de las sumatorias de fuerzas y aplicaciones de algunas leyes físicas del movimiento no competen a este curso, por tanto el ejercicio se deja hasta aquí.