RAZONAMIENTO 9° PERIODO 2

Funciones

El concepto de función se a asocia con la idea de que una variable dependa del valor de otra, a la primera se le denomina variable dependiente, pues como su nombre lo indica va a depender de otra y a la segunda se le denomina variable independiente. La relación que se establece entre estas dos variables es lo que se conoce como relación.

Para que una relación entre dos variables se le llame función debe cumplir que a cada valor de la variable independiente le corresponda un sólo valor en la variable dependiente.

A menudo utilizamos sin saberlo el concepto de función en situaciones de la vida cotidiana, como es el caso del costo total de una compra de productos dependiendo del número de artículos que se compren.

Sea (Y) el costo total de la compra, (m) el valor unitario del producto que es constante y (x) el número de unidades, se pude hallar el valor total de la compra como

Valor total = valor unitario x cantidad de unidades

$$Y = m x$$

Esta es una de las funciones más básicas, que surge de aplicar los mismos conceptos de operaciones aritméticas, pero haciendo una generalización con letras. Obsérvese que esta relación es función puesto que por cada valor de la variable x (cantidad de artículos) se obtiene un sólo valor de la variable y (costo total)

En si muchas de las funciones trabajadas en matemáticas son las mismas operaciones que conocemos, pero en vez de utilizar números se utilizan variables para poder hacer una generalización de la situación.

Otros ejemplos usuales son los siguientes

a. Recorro 45 metros cada minuto ¿Cuánto recorreré en 15 minutos?

Recorrido total = recorrido por minuto x cantidad de m.
Recorrido total = 45 x 15

b. Una piscina se llena a razón constante de 40 cm por hora ¿Qué altura habrá llenado en 3 horas?

Altura total = Altura por hora x cantidad de horas
Altura total = 40 x 3

Función lineal

En si una función lineal es aquella que se puede expresar de la forma

$$Y = mx + b$$

Donde (Y) representa la variable dependiente que es la que generalmente se analiza en las situaciones trabajadas, (m) el valor unitario de esa variable independiente denominada usualmente como pendiente, (x) la cantidad de unidades de la variable independiente y (b) una condición adicional o extra a la relación entre las variables que representa la intersección con el eje vertical en una gráfica.

Una forma de analizar problemas que implican relaciones o funciones lineales entre dos variables es la siguiente:

1. Se identifica el punto de partida o condición inicial, si la hay.

2. Al valor inicial se le suma o resta (según sea el caso) el valor de las cantidades pedidas, esto es, el valor unitario por la cantidad de unidades.

En caso de no haber condición inicial, simplemente se multiplica el valor unitario por la cantidad de unidades. Este tipo de relación se le llama proporcionalidad directa entre las variables, en cuyo caso también se podría utilizar la regla de tres para interpretar la situación.

Ejemplo 1.

Estoy a 500 metros de mi casa y me acerco a una rapidez constante de 30 metros por minuto. Una función que representa la distancia que me separa de la casa Y, respecto al tiempo transcurrido x, es

Distancia = distancia inicial – distancia acercada
Y = 500 – 30x

Ejemplo 2

A una familia le llega en la factura de teléfono 14500 de costo fijo y adicional le cobran por minuto gastado 50 pesos. La función que representa El costo de la factura Y, en función de la cantidad de minutos gastados x es:

Costo factura = costo inicial + costo de los minutos
Y = 14500 + 50 x

Ejemplo 3

Una microempresa vende paquetes de mecato a 6000 pesos, para más de 10 paquetes, los adicionales los cobran a 5000 la unidad.

a. Determinar la función que representa el precio hasta 10 unidades.

b. Determinar la función que representa el valor de las unidades adicionales (más de 10 unidades)

Solución parte a

Sea (Y) el costo de la venta y (X) la cantidad de paquetes vendidos

La función que representa el primer caso (hasta 10) seria

Costo de Venta	=	Costo unitario	*	Número de unidades
Y	=	6000	*	x

Solución parte b.

Matemáticamente para expresar la cantidad de valores x después de cierto número (a) se escribe (x -a). Para expresar los valores de x después de 10 sería (x -10).

La función que representa el segundo caso (más de 10) sería entonces

Costo de Venta	=	Costo de 10 paquetes	+	Costo de los adicionales
Y	=	60000	+	5000(x-10)

Lo anterior se puede resumir como

$$y = \begin{cases} 6000x & \text{si} \quad x \leq 10 \\ 60000 + 5000(x-10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Cuando se juntan dos o más funciones se denominan función por partes o por tramos.

Actividad aplicativa: Calorías diarias

Todos los alimentos que consumimos (Proteínas, carbohidratos o grasas), nos aportan calorías, excepto el agua, las cuales son transformadas por nuestro cuerpo en energía para realizar las actividades diarias (pensar, leer, respirar, caminar, trabajar, entre otros).

A pesar de que la cantidad de energía (calorías) que necesitamos diariamente depende de muchas condiciones como estatura, edad, peso, enfermedades, temperatura del medio ambiente, entre otros, los fisiólogos-nutricionistas Arthur **Harris** y Francis G. **Benedict** miembros del Laboratorio de Nutrición del Instituto Carnegie de Washington (EE.UU.) propusieron una fórmula para calcular la cantidad aproximada de calorías diarias (C) requeridas por una persona para mantener su peso.

Sea P el peso de la persona en kilogramos
H La estatura de la persona en centímetros
E la edad de la persona en años

Las calorías (C) que debe consumir una persona en función de las variables anteriores P, H y E, están representadas mediante la ecuación de Harris Benedict

Para hombres

$$C = 13.8\,P + 5\,H - 6.7\,E + 66$$

Para mujeres

$$C = 9.5\,P + 1.84\,H - 4.6\,E + 655$$

Teniendo en cuenta que toda persona, hace un poco de ejercicio en el trabajo, en la casa, cuando sale de casa, etc. A la cantidad de calorías mínimas necesarias para realizar las actividades cotidianas se le deben adicionar las calorías requeridas según la cantidad de ejercicio que se realice (ver tabla)

Cantidad de ejercicio	**Calorías requeridas**
Poco o ningún ejercicio	C x 1.2
Ejercicio poca intensidad	Cx1.38
Ejercicio moderado	C x 1.55
Ejercicio todos los días	Cx1.73
Ejercicio dos veces al día	C x 1,9

Determinar la cantidad de calorías que debe consumir cada estudiante, según su peso, estatura y edad.

Nota: Muchos conocimientos o teorías han surgido de la experimentación. A partir de la toma de datos se mira si sigue una secuencia y a que función se puede asociar. Esta función permite predecir resultados aproximados sin tener que hacer la actividad.

Grafica de una función lineal

Existen varias maneras de representar una función gráficamente.

La más usual quizás es la gráfica por puntos, la cual consiste en darle valores a la variable independiente y hallar los valores de la variable dependiente a partir de la función.

Ejemplo 1

Un portero sale en línea recta por toda la mitad de la cancha, desde el punto penalti de su portería que está a 11 metros del arco, hacia la portería del equipo contrario para cabecear un tiro de esquina, pues esta es la última jugada que se realizará en el partido. Si el desplazamiento lo hace a una velocidad constante de 3 metros por segundo.

a. Determine la función que representa la distancia (x) a la que se encuentra el portero de su portería, respecto al tiempo transcurrido (t)

b. Realice la gráfica X Vs. t

c. Que distancia lo separará de su portería pasados 30 segundos.

d. Si la distancia de su portería a la portería contraria es de 120 metros ¿cuánto tiempo tardará en llegar?

Solución parte a

La variable dependiente que es la que generalmente interesa analizar es la distancia total (X) desde la portería.

Distancia Total = Distancia desde donde inicia + distancia recorrida

Observe que uno de los aspectos más importantes de una función, cuando se interpreta una situación, es que las unidades de medida de cada término deben ser las mismas. En este caso la distancia medida en metros.

Como la distancia desde donde inicia es 11 metros y la distancia recorrida es igual a la distancia que recorre en un segundo (3 metros) por el número de segundos transcurridos t, se obtiene la siguiente relación o función.

Distancia Total = Distancia desde donde inicia + distancia recorrida

$$X = 11 + 3t$$

Solución parte b.

Para representar una función mediante una gráfica generalmente se utiliza el método de puntos, el cual consiste básicamente en determinar un conjunto de puntos pertenecientes a la función sobre los cuales se trazará la gráfica.

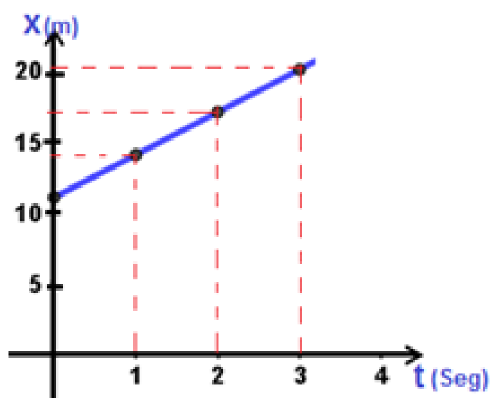
Para hallar un punto de una función se le dan valores arbitrarios a la variable independiente y a partir de la función se halla el valor correspondiente de la variable dependiente.

Para nuestro caso se inventaran tres valores para la variable independiente t, y con estos, se hallaran los valores respectivos de x.

t	x
1	14
2	17
3	20

Para t = 1, x = 11 +3(1) = 11 + 3 = 14
Para t = 2, x = 11 +3(2) = 11 + 6 = 17
Para t = 3, x = 11 +3(3) = 11 + 9 = 20

Una vez encontrados algunos puntos pertenecientes a la función se procede a graficarlos en un plano cartesiano.



Solución parte c.

Pasados 60 segundos (t = 30), se pide hallar la distancia que lo separa de la portería (x).

Al reemplazar en la función se obtiene

X = 3 t + 11
X = 3(30) + 11
X = 90 + 11
X = 101

Esto es, estará a una distancia de 101 metros respecto a su portería.

Solución parte d.

Para hallar el tiempo que se demora completando una distancia de 120 metros, se cambia en la función x = 120 y se despeja t.

X = 3 t + 11
120 = 3 t + 11
120 – 11 = 3 t
109 = 3 t
109/3 = t
36,3 = t

De lo que se concluye que tarda 36,3 segundos en hacer todo el recorrido.

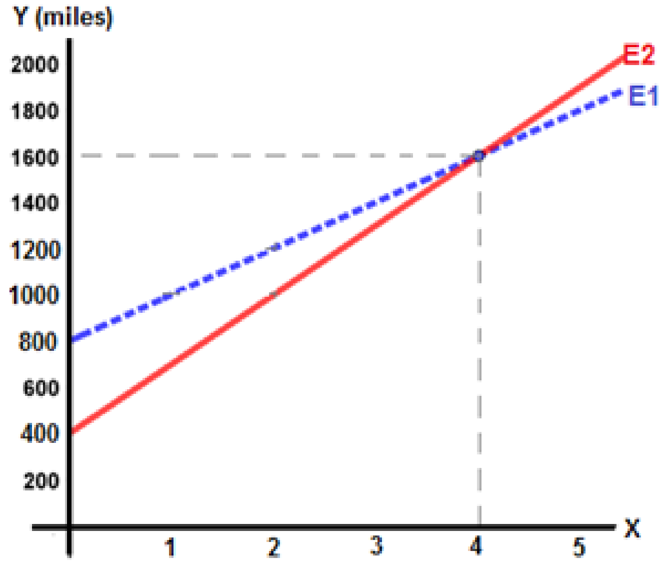
Interpretación de gráficas.

Los aspectos básicos a tener en cuenta para la interpretación de un gráfico de función lineal (recta) son los siguientes:
En primer lugar, saber el valor unitario (pendiente) de la variable dependiente, el cual se puede hallar dividiendo el avance vertical entre dos puntos cualesquiera de la recta entre el avance horizontal.
En segundo lugar tener en cuenta el término independiente o intersecto con el eje vertical, el cual indica la condición inicial.

Ejemplo 1

Un grupo de amigos quieren hacer un paseo a San Andrés, para lo cual averiguan cotizaciones con dos empresas, las cuales cobran una comisión por grupo y adicionalmente un costo por cada integrante que viaje.

Siendo (Y) el costo del viaje de todos los integrantes y (x) el número de personas que viajan, la información de la empresa 1 (E1) y la empresa 2 (E2) se presenta en la siguiente Gráfica.



¿Qué se puede inferir de la gráfica?

¿Qué representa la intersección con el eje vertical?

¿Cuál es el costo por persona para cada empresa?

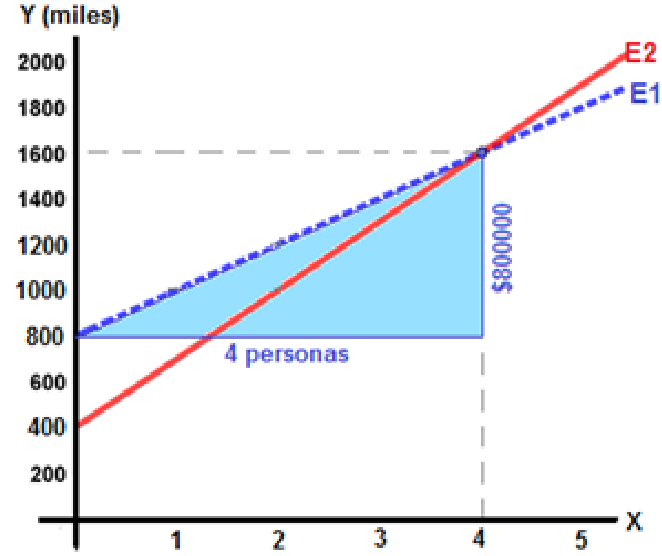
Solución

Para analizar funciones lineales es importante conocer primero el valor inicial (para x=0) y su interpretación.

Para la empresa 1 la comisión que cobran por grupo es de 800.000 mientras que para la empresa 2 es de 400.000, por tanto más barata la comisión en la empresa 2.

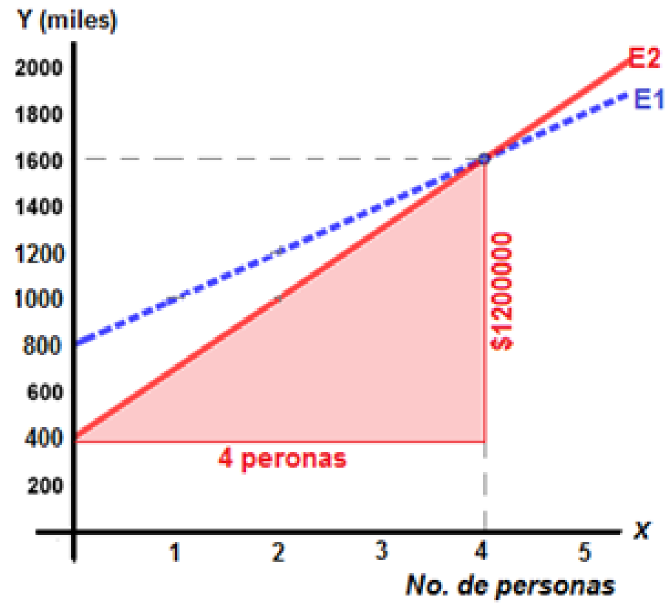
El otro aspecto fundamental a analizar, es conocer cuánto vale la unidad de la variable dependiente (costo por integrante), para lo cual se toman dos puntos cualquiera de cada recta y se divide el incremento vertical sobre el horizontal.

Para la empresa 1 se obtiene lo siguiente



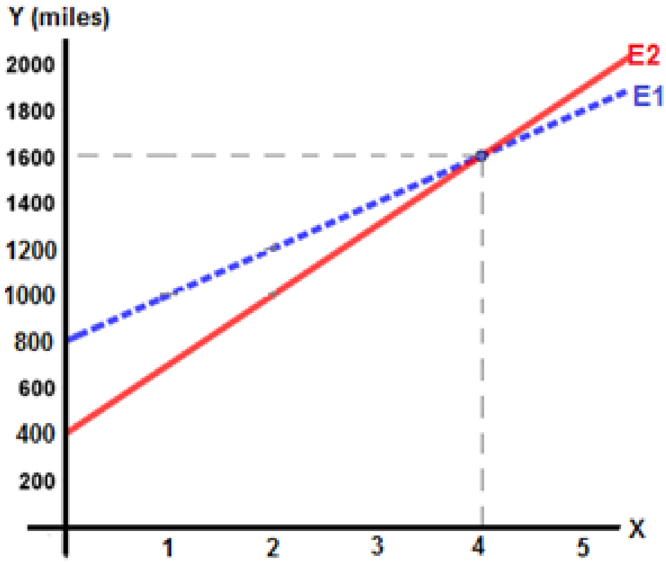
Repartiendo $800000 entre 4 personas (800000/4) se obtiene 200.000, esto es, por cada integrante del grupo la empresa 1 cobran 200.000.

Para la empresa 2 se obtiene lo siguiente



Como se pagan 1200000 por 4 personas cada persona en la empresa 2 deberá pagar (1200000/4) $300000.

Una conclusión final que se puede sacar de la gráfica sobre el costo por todos los integrantes (y) es que hasta 4 integrantes el costo total sale más económico en la empresa 2, para 4 personas sale lo mismo de económico en ambas empresas y para más de 4 es más económico en la empresa 1.



¿Qué se puede inferir de la gráfica?

¿Qué representa la intersección con el eje vertical?

¿Cuál es el costo por persona para cada empresa?

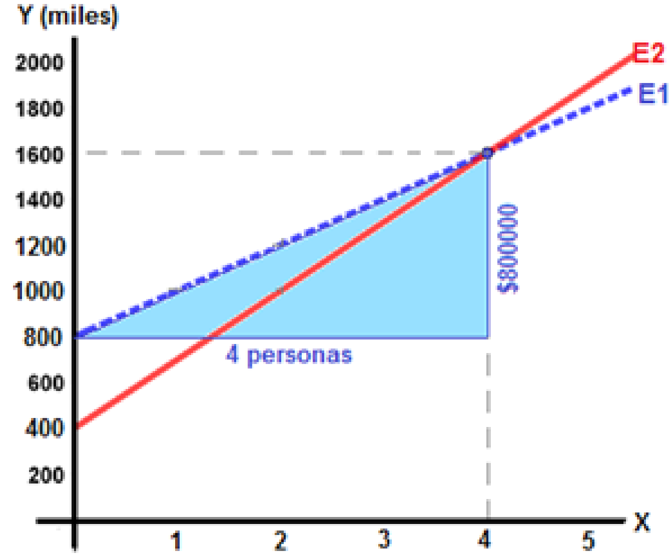
Solución

Para analizar funciones lineales es importante conocer primero el valor inicial (para x=0) y su interpretación.

Para la empresa 1 la comisión que cobran por grupo es de 800.000 mientras que para la empresa 2 es de 400.000, por tanto más barata la comisión en la empresa 2.

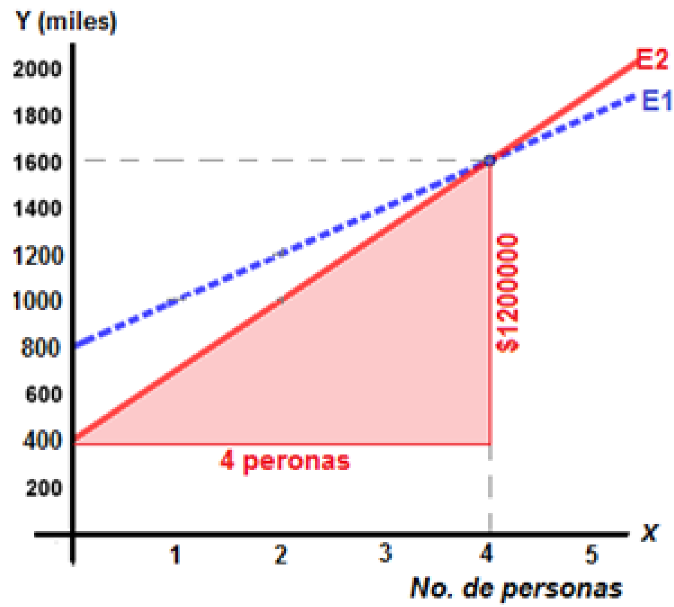
El otro aspecto fundamental a analizar, es conocer cuánto vale la unidad de la variable dependiente (costo por integrante), para lo cual se toman dos puntos cualquiera de cada recta y se divide el incremento vertical sobre el horizontal.

Para la empresa 1 se obtiene lo siguiente



Repartiendo $800000 entre 4 personas (800000/4) se obtiene 200.000, esto es, por cada integrante del grupo la empresa 1 cobran 200.000.

Para la empresa 2 se obtiene lo siguiente

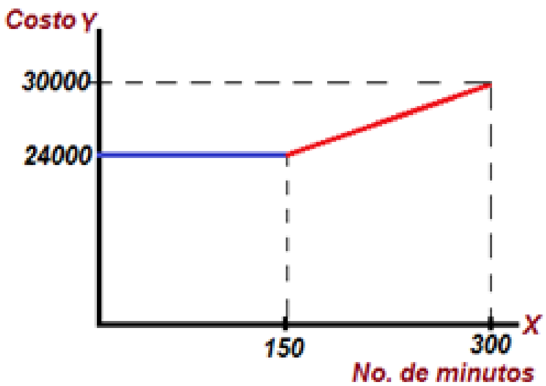


Como se pagan 1200000 por 4 personas cada persona en la empresa 2 deberá pagar (1200000/4) $300000.

Una conclusión final que se puede sacar de la gráfica sobre el costo por todos los integrantes (y) es que hasta 4 integrantes el costo total sale más económico en la empresa 2, para 4 personas sale lo mismo de económico en ambas empresas y para más de 4 es más económico en la empresa 1.

Ejemplo 2

La gráfica representa un plan de celular mensual que ofrece cierta empresa en el mercado, donde (y) que es la variable dependiente representa el costo de la factura y (x) que es la variable independiente representa el número de minutos consumidos.



a. Hacer una interpretación del gráfico con los datos dados en la gráfica.

b. Determinar las ecuaciones de cada recta y explicar su significado.

c. ¿Cuánto debe pagar una persona que gastó 75 minutos de su plan?

d. Si una persona pago una factura de $33000 ¿cuántos minutos gasto?

Solución parte a

Hasta los 150 minutos se cobra un costo fijo de 24000, después de los 150 minutos el valor de la factura va incrementando a medida que aumentan los minutos gastados, para 300 minutos por ejemplo debe pagar 30000.

Solución parte b

Hasta 150 minutos ($x \leq 150$) el costo (Y) es constante. Esto es, no importa cuantos minutos gaste, debe pagar 24000.

Y = 24000 para **x ≤ 150** minutos

Para más de 150 minutos ($x > 150$) debe pagar el costo fijo de 24000 más la cantidad de minutos adicionales gastados. Por lo cual hay que conocer cuánto vale cada minuto adicional.

Como de 150 a 300 hay 150 minutos adicionales y de 24000 a 30000 hay un incremento en el pago de $6000, si se reparten esos $6000 entre 150 minutos (6000/150) queda un valor de 40 pesos por minuto.

Luego se concluye que

Costo de La factura	=	costo fijo	+	Costo de los minutos adicionales

Conociendo que los minutos adicionales a 150 se expresan como el total de minutos x quitándole los 150 ($x - 150$) y que el costo de los minutos adicionales es el valor de cada minuto ($40) por la cantidad de minutos adicionales ($x - 150$), se obtiene la siguiente función.

$$Y = 24000 + 40(x-150) \qquad \text{para } x > 150 \text{ minutos}$$
$$Y = 24000 + 40x - 6000$$
$$Y = 40x + 18000$$

Para los puntos c y d, no es si no reemplazar una de las variables en la función y con esto despejar la otra variable, por tanto quedan como ejercicio para los estudiantes.

Método 2 para hallar la ecuación de una recta

Cómo la función lineal es aquella función que se puede expresar de la forma $y = mx + b$, determinar la función lineal consiste básicamente en hallar los valores de las constantes m (que es la pendiente o valor unitario de la variable dependiente) y b (que es la condición inicial o intercepto con el eje vertical.

Para hallar la pendiente o valor unitario de la variable dependiente, sabiendo que la recta pasa por los puntos (150, 24000) y (300, 30000), se divide el incremento de las coordenadas en (y) sobre el incremento de las coordenadas en (x)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30000 - 24000}{300 - 150} = \frac{6000}{150} = 40$$

Esto es, el valor de la unidad de la variable dependiente (costo de la unidad) es de 40 pesos por minuto

Para determinar el valor de la constante (b) se reemplaza el valor hallado de la pendiente y un punto (x, y) cualquiera de la función, en la ecuación de la recta

Y = mx + b

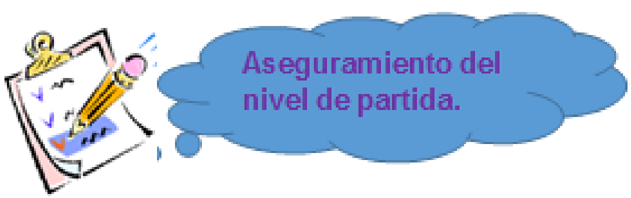
Tomando el punto (300, 30000) y la pendiente m= 40 y reemplazándolos en la ecuación de la recta, se obtiene lo siguiente:

30000 = 40(300) + b
30000 = 12000 + b
30000 – 12000 = b
18000 = b

Por último, al reemplazar la pendiente (m = 40) y el intercepto con el eje y (b = 18000), se obtiene la función pedida.

Y = 40x + 18000

Volúmenes de cuerpos geométricos



Áreas de figuras más usuales

Cuadriláteros con todos los lados paralelos 2 a 2

Rectángulo **Cuadrado** **Romboide**

Área = *base x altura*

Cuadriláteros con sólo un par de lados paralelos

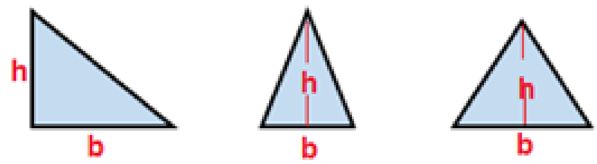
Trapecio isósceles **Trapecio rectángulo**

Área = suma de las bases por la altura, dividido 2

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Triángulos

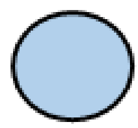
Rectángulo **Isósceles** **Equilátero**



Área= base por altura, dividido 2

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Círculo

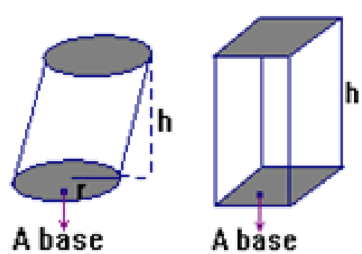


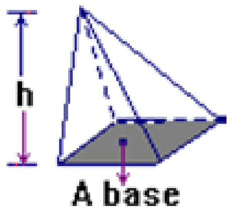
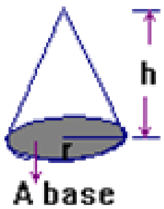
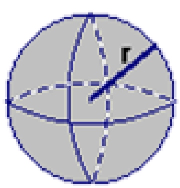
$$Área = \pi \cdot r^2$$

$$Perímetro = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Volumen o capacidad de un cuerpo

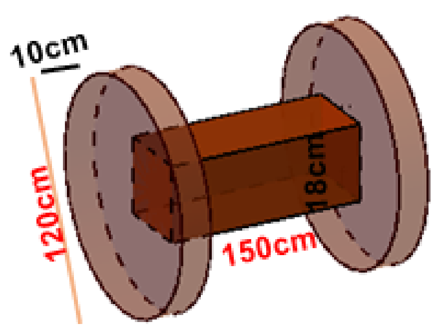
El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo. Usualmente el término capacidad y el término volumen se utilizan como sinónimos, en el sentido que la capacidad de un recipiente es en sí el volumen de del cuerpo solido que cabe exactamente en dicho recipiente.

Cuerpos geométricos	Volumen
Cuerpos con dos caras paralelas e iguales 	**V** = área base X altura

Cuerpos con una cara base, y el resto de sus caras laterales convergentes a un vértice común.  	**V** = $\frac{1}{3}$ del área base X altura
Esfera 	**V** = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Ejemplo 1

Cierta empresa de energía para transportar cable de luz, utiliza dos tapas cilíndricas de 120 cm de diámetro y 10 cm de ancho, unidas por un prisma de base cuadrada de 20 cm de lado y 150 cm de largo, tal como se muestra en la figura



Si cada cm³ de la tapa pesa 6 gramos y cada cm³ del prisma 8 gramos ¿Cuál será el peso total del porta cables?

Solución

Para determinar el peso total del porta cables, primero se debe conocer el volumen de las tapas y del prisma y a partir de ellos determinar el peso total multiplicando, el peso de cada cm³ por el total de cm³.

El volumen del cuerpo está conformado por dos tapas cilíndricas y un prisma recto de base cuadrada

El volumen de cada tapa cilíndrica de 60 cm de radio y 10 cm. de altura sería el siguiente.

$$V_C = (\acute{A}rea\ del\ c\acute{i}rculo)altura$$
$$V_C = (\pi \cdot r^2)h$$
$$V_C = (3600\,\pi)10$$
$$V_C = 36000\ \pi cm^3$$
$$V_C \approx 113040\ cm^3$$

Como son dos tapas el volumen seria 226080 cm³

Por otro lado, el volumen del prisma de base cuadrada de 18 cm. de lado y 150cm. de altura es el siguiente

$$V_P = (\acute{A}rea\ del\ cuadrado)altura$$
$$V_P = (l^2)h$$
$$V_P = (324)10$$
$$V_P = 3240cm^3$$

Para finalizar, Como cada cm³ del material en que están hechas las tapas pesan 6 gramos y cada cm³ del prisma pesa 8 gr, el peso total del porta cable sería

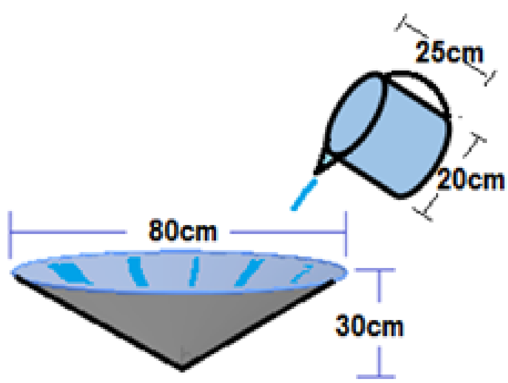
$$Peso\ de\ las\ tapas \approx 6(226080)gramos$$
$$Peso\ de\ las\ tapas \approx 1356480\,gramos$$

$$Peso\ del\ prisma = 8\,(3240\,)gramos$$
$$Peso\ del\ prisma = 25920\ gramos$$

$$Peso\ Total \approx 1356480 + 25920$$
$$Peso\ Total \approx 1382400\ gramos$$
$$Peso\ Total \approx 1382\,,4kg.$$

Ejemplo 2

En un club de la ciudad, hay una copa grande de forma cónica, de 70 cm de radio y 30 cm de altura, con una llave en la parte inferior que permite vaciar la cerveza. El mesero del lugar debe llenarla vaciando cerveza con una jarra de forma cilíndrica de 20 cm de diámetro y 25 cm de altura. ¿Cuántas veces tendrá que vaciar la jarra para que la copa quede completamente llena?



Solución.

Para saber cuántas veces cabe el volumen de la jarra en el volumen de la copa cónica, se necesita conocer el volumen de ambos, para luego dividirlos.

EL volumen de la copa cónica está dado por

$$V_{copa} = \frac{(\text{Área del círculo})\text{altura}}{3}$$

$$V_{copa} = \frac{(\pi \cdot r^2)h}{3}$$

$$V_{copa} = \frac{(1600\ \pi)30}{3}$$

$$V_{copa} = 16000\ \pi\ cm^3$$

El volumen de la jarra cilíndrica está dado por

$$V_{jarra} = (\text{Área del círculo})\text{altura}$$

$$V_{jarra} = (\pi \cdot r^2)h$$

$$V_{jarra} = (100\ \pi)25$$

$$V_{jarra} = 2500\ \pi\ cm^3$$

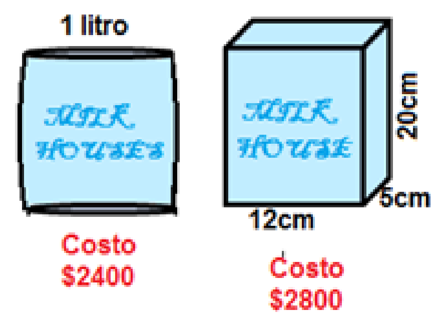
Para determinar cuántas veces cave o se puede vaciar la jarra en la copa se hace una división.

$$\frac{V_{copa}}{V_{jarra}} = \frac{16000\ \pi}{2500\ \pi} = 6,4$$

Por lo que debe vaciar 6,4 veces la copa, esto es, 6 copas completas y 4 décimas de la otra. Por lo que en total se debe vaciar la jarra 7 veces.

Ejemplo 3

Doña amparo va al supermercado a comprar leche líquida para llevarle a su bebe. La figura muestra las dos opciones de dicha leche, que le ofrece el supermercado.



Conociendo que 1 litro equivale a 1000 cm³

a. ¿Cuál de las dos leches debería escoger doña Amparo para que le salga más económica?

b. ¿Cuánto material como mínimo se necesitó para fabricar dicha caja?

Solución parte a

Cuando de hablamos de economía de un producto existen dos variables a tener en cuenta que son el volumen o cantidad y el precio. Como tienen diferente precio y diferente cantidad se debe entonces mirar cuál es el costo de la unidad, que resulta de dividir el costo entre las unidades o volumen.

Volumen bolsa	**Volumen caja**
	$Abase \times altura$
$1\ litro$	$(12 \times 5)20$
$1000\ cm^3$	$1200 cm^3$

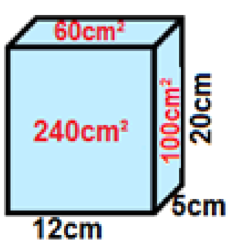
Costo unitario De las bolsa	**Costo unitario de la Caja**
$\frac{2400}{1000}$	$\frac{2800}{1200}$
2.4	2.3

Saldría más económica la caja, puesto saldría a \$2.3 el cm^3.

Solución parte b

Hablar de cuánto material se requiere para construir la caja es hablar del área superficial de dicha caja.

Para hallar el área de dicha caja basta con hallar el área de cada cara rectangular de la caja multiplicando largo por ancho.

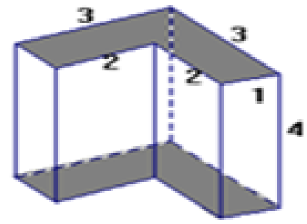


Como cada cara tiene su opuesta igual, el área superficial seria

$$2(240cm^2) + 2(60cm^2) + 2(100cm^2)$$
$$400cm^2$$

Ejemplo 4.

Hallar el volumen del siguiente sólido, si las medidas correspondientes están en centímetros.



Solución

Como es un cuerpo sólido con dos caras paralelas e iguales, una de las formas de hallar su volumen es encontrando el área de la base y multiplicando dicho resultado por la altura.

V = A base X altura

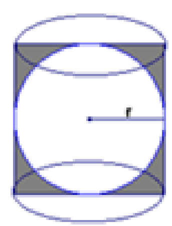
La base se puede descomponer en dos rectángulos, uno de 1cm. de ancho por 3 cm. de largo y el otro de 1cm. de ancho por 2 cm. de largo, por tanto el volumen total sería

V = $(1cm. \times 3cm. + 2cm. \times 1cm.)6cm.$

V = $30cm.^2$

Ejemplo 5

Se tiene una esfera de 3 cm. de radio inscrita en un cilindro tal como se ilustra en la figura. Hallar el volumen que hay entre la esfera y el cilindro.



Solución

Para hallar el volumen que se encuentra entre un cuerpo exterior y uno interior, se resta el volumen exterior con el volumen del cuerpo interior.

V = V cilindro – V esfera

$$V = (\pi \cdot r^2)2r - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{1}\pi \cdot r^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot (3)^3 = 18\pi = 56{,}52\ cm^3$$