Marco teórico RAZ 11° Periodo 3

Probabilidad para eventos dependientes e independientes.

Antes de entrar a trabajar con la probabilidad para eventos dependientes o independientes, es necesario recordar algunos conceptos básicos como son la probabilidad y los conceptos de unión e intersección para eventos excluyentes o no excluyentes.

Introducción al concepto de probabilidad

Experimento: En estadística se le llama experimento a todo acto que genera unos resultados, existen dos tipos de experimentos

Experimentos deterministas: Cuando los resultados se pueden controlar o saber con anticipación ya que siempre que realice el mismo ensayo de un experimento se va a obtener el mismo resultado.

Ejemplo: hallar el periodo de un péndulo dependiendo de la longitud de la cuerda.

Experimentos aleatorios: cuando no es posible de ninguna manera controlar o adivinar con anterioridad los resultados de un experimento. Ejemplo. Lanzar un dado

Probabilidad de un suceso (regla de Laplace): la probabilidad de que se dé un evento determinado A, se define como *"la razón entre las posibilidades de ocurrencia del evento A y el total de los posibles resultados del experimento en cuestión"*.

$$P(A) = \frac{\textit{Posibilidades de ocurrecia de } A}{\text{posibles resultados del experiment o}}$$

Ejemplo

Juan fue a los examenes requeridos para prestar el servicio militar obligatorio. Sólo se salvarían de prestar este servicio militar los que no fueran aptos por alguna enfermedad o los que sacaran una balota blanca. Si en total hay 5 balotas blancas y 20 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan se salve de prestar el servicio militar si sólo le queda la oportunidad de sacar la balota blanca?

$$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 25\% = 0.25$$

Probabilidad para la unión e intersección de eventos excluyentes o no excluyentes

Cuando los datos están representados en tablas de contingencia o mediante diagramas de conjuntos la parte de la unión y la intersección se pueden leer directamente, por lo que no hay necesidad de aplicar los teoremas de probabilidad, sino simplemente leer los datos del gráfico, aplicando de una vez la definición de probabilidad.

En esta parte no nos enmarcaremos en los teoremas de la teoría de probabilidad si no en la definición del concepto de probabilidad (posibilidades de un evento específico sobre posibilidades totales)

Ejemplo 1

La rectora de la institución francisco miranda hizo una reunión con los docentes de matemáticas, español, ciencias e inglés. En la tabla se muestra la cantidad de profesores que asistieron a la reunión.

Género / Área	Hombres	Mujeres
Matemáticas	5	5
Español	3	7
Ciencias	2	6
Ingles	6	4

La rectora al final de la reunión desea rifar un regalo para motivarlos a seguir trabajando por la institución.

Determinar la probabilidad de

a. Que se lo gane un profesor de género masculino.

b. Que se lo gane un profesor (sea hombre o mujer) del área de español.

c. Que se lo gane alguien del área de español o de matemática. (E U M)

d. Que se lo gane alguien que sea de matemáticas o de género femenino.

e. Que se lo gane alguien que sea mujer y del área de inglés. (M $\cap$ I)

f. Que se lo gane una mujer si se va a rifar entre los profes de español.

Solución parte a

Como los profesores de género masculino son (18) de un total de (38), la probabilidad seria:

$$P(masculino) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} = 0{,}474 = 47{,}4\%$$

Solución parte b

Como los profesores de español son (10) de un total de (38), la probabilidad seria:

$$P(español) = \frac{10}{38} = \frac{5}{19} = 0{,}263 = 26{,}3\%$$

Solución parte c

Teniendo en cuenta que los profesores que pertenecen a alguna de las dos áreas, español o matemáticas $(M \cup E)$, son 20 $(5 + 5 + 3 + 7)$ de un total de 38, la probabilidad seria:

$$P(M \cup E) = \frac{20}{38} = \frac{9}{19} = 0{,}474 = 47{,}4\%$$

Solución parte d

Teniendo en cuenta que los profesores que pertenecen a matemáticas o al género femenino $(M \cup F)$, son 27 $(4 + 6 + 7 + 5 + 5)$ de un total de 38, la probabilidad seria:

$$P(M \cup E) = \frac{27}{38} = 0{,}711 = 71{,}1\%$$

Solución parte e

Teniendo en cuenta que los profesores que pertenecen a matemáticas y a la vez son de género femenino $(M \cap F)$, son 5 de un total de 38, la probabilidad seria:

$$P(M \cap F) = \frac{5}{38} = 0{,}132 = 13{,}2\%$$

Solución parte f

En este punto, lo único diferente respecto a los anteriores, es que como ya se escogió que se va a rifar entre los de español, el total que participaran en la rifa ya no son los 38 profesores, sino sólo los 10 de español.

Como las profes mujeres que dan español son 7 de un total de 10 profesores de español, la probabilidad de que sea mujer (F) de todos los profes de español (E) sería:

$$P(F / E) = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$$

PROBABILIDAD PARA EVENTOS INDEPENDIENTES

Antes de explicar la probabilidad para eventos dependientes o independientes es importante conocer la diferencia entre eventos dependientes e independientes con los eventos excluyentes o no excluyentes.

Los términos de eventos excluyentes o no excluyentes se utilizan cuando son eventos que pertenecen a un mismo experimento, como es por ejemplo sacar par o impar al lanzar un dado, en este caso los eventos pertenecen ambos al mismo experimento de lanzar un dado.

Los términos de eventos dependientes o independientes, se utilizan cuando se hace referencia a eventos que no están en un mismo espacio muestral, sino, entre espacios mustrales diferentes, por ejemplo, lo mismo que el caso anterior, caer par o impar, pero ya no en un sólo dado, sino par en un dado e impar en el otro dado.

Cuando se habla de eventos de diferentes espacios mustrales, como lanzar dos dados o hacer dos extracciones de una urna, se dice que son independientes, si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro, como es el primer caso mencionado de lanzar dos dados. Y son dependientes, cuando la ocurrencia de uno si afecta la ocurrencia del otro, en tanto que aumenta o reduce las posibilidades del otro, como lo es el segundo caso de hacer dos extracciones de una urna, al sacar la primera, si no se reemplaza de nuevo, ya no van a haber las mismas posibilidades, sino una menos.

Es importante también destacar que cuando se habla de intersección en eventos excluyentes o no excluyentes, esta hace referencia a los elementos comunes, mientras que cuando se habla de la intersección en eventos independientes o dependientes, esta hace referencia al total de posibilidades en que pueden ocurrir los dos eventos de manera simultánea, esto es, un elemento del primer evento con un elemento del segundo evento.

Ejemplo de intersección entre eventos independientes

Si se lanza una moneda y un dado cuántas posibilidades diferentes hay de:

a. Sacar un número par y una cara.
b. Sacar número par o cara

Solución parte a

Del experimento 1 que es lanzar un dado hay 3 posibilidades de obtener par.
Del experimento 2 que es lanzar una moneda hay 1 posibilidad de obtener cara.

El número de maneras en que puedo obtener un par y una cara (par $\cap$ cara), está dado por la multiplicación de sus posibilidades individuales.

$$\mathbf{n\,(par \cap cara) = n\,(par) \times n\,(cara) = 3 \times 1 = 3}$$

Para tener una mayor claridad de lo que se hizo representemos la situación mediante un diagrama de árbol.

DADO	**Moneda**	**posibilidades**
1	**C**	**1 C**
	S	**1 S**
2	**C**	**2 C**
	S	**2 S**
3	**C**	**3 C**
	S	**3 S**
4	**C**	**4 C**
	S	**4 S**
5	**C**	**5 C**
	S	**5 S**
6	**C**	**6 C**
	S	**6 S**

Son tres posibilidades de sacar, un número par y una cara, lo cual coincide con lo realizado anteriormente.

Solución parte b

Del experimento 1 que es lanzar un dado, hay 3 posibilidades para obtener par (caer 2, 4 o 6). Como por cada posibilidad de estas hay dos posibilidades del dado, serían en total (3 x 2) 6 posibilidades de caer una pareja cualquiera conformada por un número par (Para el 2 hay dos posibilidades de ocurrencia, para el 4 otras dos y para el 6 también dos) tal como se puede ver en el gráfico anterior.

Del experimento 2 que es lanzar una moneda hay 1 posibilidad de obtener cara, y como por la posibilidad de obtener cara hay 6 posibilidades para el dado, en total serían (1 x 6) 6 posibilidades de caer cara.

El número de maneras en que puedo obtener un par y una cara simultáneamente (par $\cap$ cara), está dado por la multiplicación de sus posibilidades individuales tal como se vio en el ejemplo anterior, esto es (3 x 1) son 3 posibilidades de obtener un par y una cara.

Como estas 3 posibilidades se suman, en dos veces, tanto en las posibilidades de caer par como en las de caer cara, cuando realmente solo son 3 posibilidades, al total de las posibilidades de cada uno de estos eventos, en vez de sumar la intersección se le debe restar.

Para visualizar mejor la situación a continuación se presenta el diagrama de árbol para dicha situación., señalando las 6 posibilidades de caer par (azul), las 6 posibilidades de caer cara (verde) y las 3 posibilidades de ocurrir ambos casos (recuadros)

DADO	**Moneda**	**posibilidades**
1	C	1 C
	S	1 S
2	C	2 C
	S	2 S
3	C	3 C
	S	3 S
4	C	4 C
	S	4 S
5	C	5 C
	S	5 S
6	C	6 C
	S	6 S

Por lo que se puede deducir que, las posibilidades de caer par o cara, se determinan sumando las posibilidades que tienen de caer cada evento, menos las posibilidades de ocurrir ambos eventos.

n (P $\cup$ C) = n (P) + n (C) − n (P $\cap$ C)

Es importante aclarar que cuando son dos experimentos independientes o dependientes, siempre se habla es de posibles parejas o si fueran tres experimentos, se hablarían de trío de elementos, etc.

Probabilidad para la intersección de eventos independientes

Ejemplo si se conoce que A y B son dos eventos independientes

Sea

A: el número de posibilidades de ocurrir A, de un espacio muestral E_1

B: el número de posibilidades de ocurrir B de un espacio muestral E_2

$$P(A \cap B) = \frac{\text{No. de elementos de } (A \cap B)}{\text{Total de posibles resultados}}$$

Del principio multiplicativo se sabe que si un evento tiene m posibilidades de ocurrir y otro evento tiene n maneras de ocurrir, el número de posibilidades en que pueden ocurrir ambos eventos está dado por la multiplicación entre sus posibilidades. De lo que se deduce que

$$P(A \cap B) = \frac{n(A) \cdot n(B)}{n(E_1) \cdot n(E_2)}$$

$$P(A \cap B) == P(A) \cdot P(B)$$

Esto es, si dos eventos son independientes, la probabilidad de que se den ambos eventos está dado por la multiplicación entres sus probabilidades de manera independiente.

Ejemplo

Determinar la probabilidad de caer par y cara al lanzar un dado y una moneda

Solución por teoría

$$P(par \cap cara) = P(par) \cdot P(cara)$$

$$P(par \cap cara) == \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Solución con diagrama de árbol

Si se lee directamente del diagrama de árbol que es otra forma de contar las diferentes posibilidades, se apreciaría más fácil este resultado.

DADO	Moneda	posibilidades
1	C	1 C
	S	1 S
2	C	2 C
	S	2 S
3	C	3 C
	S	3 S
4	C	4 C
	S	4 S
5	C	5 C
	S	5 S
6	C	6 C
	S	6 S

Las posibilidades de sacar par y cara son 3 de un total de 12, por tanto

$$P(par \cap cara) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Probabilidad para la unión de eventos independientes

Sean A y B dos eventos independientes de dos experimentos aleatorios diferentes con espacios muéstrales E_1 y E_2 respectivamente, la probabilidad de que se dé un elemento de A del primer espacio muestral o se dé un elemento de B, del segundo espacio muestral, está determinada por:

$$P(A \cup B) = \frac{\text{No. de elementos de } (AUB)}{\text{Total de posibles resultados}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{\mathrm{n(E_1) \cdot n(E_2)}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)n(E_2)}{n(E_1).n(E_2)} + \frac{n(B)n(E_1)}{n(E_1).n(E_2)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E_1).n(E_2)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(E_1).} + \frac{n(B)}{n(E_2)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E_1)n(E_2)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esto es, si dos eventos son independientes la probabilidad de que se dé el uno o el otro, se puede determinar como la suma de las probabilidades de la ocurrencia de cada evento de manera individual, menos la probabilidad de ocurrencia de su intersección.

Ejemplo 1

Determinar la probabilidad de caer par o cara al lanzar un dado y una moneda.

Solución

Teniendo en cuenta que la probabilidad de la unión de dos eventos independientes (A o B) se define como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se deduce que

$$P(par \cup cara) = P(par) + P(cara) - P(par \cap cara)$$

$$P(par \cup cara) = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{12}$$

$$P(par \cup cara) = \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12}$$

$$P(par \cup cara) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Solución utilizando diagrama de árbol

DADO	Moneda	posibilidades
1	C	1 C
	S	1 S
2	C	2 C
	S	2 S
3	C	3 C
	S	3 S
4	C	4 C
	S	4 S
5	C	5 C
	S	5 S
6	C	6 C
	S	6 S

Las parejas de elementos que tienen un par o una cara, son 9 de un total de 12, de lo que se deduce que

$$P(par \cup cara) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Lo cual coincide con la teoría.

Ejemplo 2
En una urna hay 5 balotas rojas y 4 balotas blancas y 3 Verdes. Si se extraen dos balotas haciendo reemplazamiento, esto es, se saca primero una y vuelve y se hecha a la urna para volver a sacar, hallar la probabilidad de

A. Sacar dos balotas rojas
B. Sacar alguna de las dos balotas rojas
C. Sacar una balota roja en la segunda extracción dado que se obtuvo una en la primera
D. Sacar una balota roja y una blanca

Solución parte A

Sea el experimento 1 sacar una balota de la urna y el experimento 2 sacar una balota después de haber devuelto la balota sacada anteriormente. Como la ocurrencia del experimento dos no se ve afectado por el experimento 1, los experimentos son independientes entre sí.

Sea R1 el evento sacar roja en la primera extracción y R2 sacar roja en la segunda extracción, utilizando la probabilidad para la intersección de dos eventos independientes, se obtiene lo siguiente.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2)$$
$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

Solución parte B

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$$
$$P(R_1 \cup R_2) = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} - \frac{25}{144} = \frac{100}{144} = \frac{25}{36}$$

Solución parte C

Como el experimento 2 no se va a ver afectado por haber realizado el experimento 1, su probabilidad tampoco se afecta. Esto es, la probabilidad de sacar roja en la segunda extracción dado que se sacó roja en la primera, denotado matemáticamente como $P(R_2 / R_1)$, es lo mismo que determinar directamente la probabilidad de sacar roja en la segunda.

$$P(R_2 / R_1) = P(R_2)$$
$$P(R_2 / R_1) = \frac{5}{12}$$

Solución parte D:

En el caso de que no se haga distinción entre si es del evento 1 o el evento 2, se debe hallar la probabilidad de ocurrencia de uno de los posibles casos, y como cada caso tiene la misma probabilidad, se multiplica por la cantidad de estos posibles casos, que se pueden hallar por diagrama de árbol o utilizando técnicas de conteo.

Uno de los posibles resultados de sacar 1 balota roja y una blanca es sacar la roja en la primera extracción y la blanca en la segunda, cuya probabilidad sería

$$P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \cdot P(B_2)$$
$$P(R_1 \cap B_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

Ahora bien, de cuantas maneras se pueden sacar una roja y una, esto es, de cuantas maneras se pueden organizar una balota roja y una blanca.

2P2 = 2! = 2 x 1 = 2 posibilidades

O de lógica, una posibilidad sería roja en la primera y blanca en la segunda y la otra sería blanca en la primera y roja en la segunda.

Por tanto la probabilidad de sacar una roja y una blanca, sin hacer distinción en el orden, es.

$$P(R \cap B) = 2veces\frac{20}{81} = 2 \times \frac{20}{81} = \frac{40}{81}$$