Periodo 4

Proporción

Una proporción es una igualdad entre dos razones.

Una de las formas para conseguir una proporción a partir de una fracción o razón dada, es amplificar o simplificar dicha fracción.

Dada la razón $\frac{6}{8}$ por ejemplo, se puede completar una proporción o igualdad entre dos razones, amplificando por un factor de 5.

$$\frac{6 \times 5}{8 \times 5} = \frac{30}{40}$$

De lo que se concluye que $\frac{6}{8}$ (la razón inicial) es igual a $\frac{30}{40}$ (razón amplificada) y forman una proporción.

> *NOTA: Aunque matemáticamente las razones o fracciones se pueden considerar como una misma cosa, en su aplicabilidad es importante diferenciar que las razones se utilizan para comparar o relacionar los valores de dos variables diferentes, mientras que en la fracción se hace referencia a una sola variable, aunque matemáticamente cumplen las mismas propiedades.*

Entre algunas relaciones o razones usuales en nuestra vida cotidiana están: la relación entre la distancia recorrida por un objeto y el tiempo tardado, la relación entre el peso de un objeto y su masa, la relación entre la cantidad de artículos comprados de un solo tipo y su precio, etc. Cuando son relaciones muy usadas generalmente se les da un nombre, como son la velocidad, la densidad, el precio unitario, entre otros.

Proporcionalidad directa

Cuando se están relacionando dos variables, se dice que estas tienen una relación de proporcionalidad directa, sí a partir de una relación inicial, cualquier otra relación es una amplificación o simplificación de esta inicial, es decir, si una de ellas se duplica la otra también se debe duplicar, si una de ellas se reduce a la mitad la otra también lo debe hacer.

Teniendo en cuenta las propiedades de las fracciones, debido a que una razón es en sí una fracción, al amplificar o simplificar una fracción por un mismo factor, la nueva fracción es equivalente a la inicial, esto es siempre serán iguales formando siempre una proporción.

Un ejemplo muy usual en la cotidianidad, es el precio a pagar en relación a la cantidad de artículos de un mismo tipo, que se compren.

La relación por ejemplo de 5 panes tienen un costo 1000 pesos, matemáticamente se puede escribir de varias formas: $\left(\frac{5 \ \ panes}{1000 \quad pesos}\right)$ ó $\left(\frac{1000 \quad pesos}{5 \ \ panes}\right)$ ó (5 panes : 1000 pesos).

Esta última forma se utilizará para trabajar la denominada regla de tres.

Cuando dos variables son directamente proporcionales y se conoce una relación cualquiera entre estas, se puede completar cualquier otra relación, a partir de la idea, de que la otra es una amplificación o simplificación de la razón inicial y por tanto siempre serán iguales.

En el caso que se quisiera saber el costo de 12 panes, por ejemplo, tomando la relación dada $\left(\frac{5 \ \ panes}{1000 \quad pesos}\right)$ y conociendo que toda fracción (razón) que se forme van a ser equivalente, se obtendría la siguiente ecuación.

$$\frac{5 \ \ panes}{1000 \ \ \ pesos} = \frac{12 \ \ panes}{x}$$

Esta ecuación se puede interpretar como:

Sí por 5 panes se pagan 1000 pesos, por 12 panes ¿cuánto se pagará?

Para resolverla se acostumbra pasar los denominadores a lados contrarios a multiplicar, es decir, en una proporción la multiplicación de los medios es igual a la multiplicación de los extremos, propiedad que se conoce común mente como multiplicación en cruz.

$$\frac{5}{1000} = \frac{12}{x}$$
$$5x = 12(1000)$$
$$5x = 12000$$

Es importante recordar que la multiplicación pude ser expresada con paréntesis, con el sigo "x", con un punto o si es con letras no es necesario colocar nada, porque se supondrá que si no hay signo entre dos cosas estas se están multiplicando.

Para finalizar, el número que está acompañando la incógnita x, se pasa al otro lado a dividir.

$$5x = 12000$$
$$x = \frac{12000}{5}$$
$$x = 2400$$

Como x está representando la cantidad de dinero que se pagaría por 12 panes, se deduce entonces que estos 12 panes costarían 2400 pesos.

Nota: aunque este proceso se hizo aplicando la teoría de proporcionalidad directa, es muy usual que se halle primero el valor de la unidad y luego se multiplique por la cantidad de unidades, en este caso el valor de un pan sería 200 pesos, por lo que doce panes costarían 12x200 = 2400.

En algunas situaciones será más fácil trabajar con el valor de la unidad, pero en otras será más fácil trabajar con proporciones, por lo que es importante manejar los dos métodos.

Aplicaciones de la proporcionalidad directa.

Una forma sencilla de verificar si dos variables son directamente proporcionales, es tomando la relación conocida entre estas, y si al duplicar una de ellas la otra también se debe duplicar, entonces si guardan una relación de proporcionalidad directa entre sí.

Ejemplo 1

Una receta de la abuela dice que por cada 500 gramos de arroz se deben adicionar 900 cm³ de agua. Si sólo se quiere hacer 300 gramos de arroz ¿cuántos cm³ de agua se deben utilizar?

Solución por proporciones

Como a partir de la relación dada (por *500 gramos de arroz se utilizan 900 cm³ de agua) se puede deducir que si se duplica el arroz se debe duplicar el agua, entonces, las dos variables de las que se está hablando son directamente proporcionales.*

Al expresar esta relación dada y la que se quiere completar se obtiene lo siguiente.

$$\frac{500 \ \ gramos}{900 \ \ cm^3} = \frac{300 \ \ gramos}{x}$$

Multiplicando en cruz, sin tomar en cuenta las unidades de medida ya que se sabe, que la x es la cantidad de agua, se obtiene.

$$500 \ x = 270000$$
$$x = \frac{27000}{500}$$
$$x = 540$$

De lo que se concluye que por 300 gramos de arroz se deben utilizar 540 cm³ de agua.

Ejemplo 2

Una Gorra tiene en su etiqueta un precio de 15800 pesos, pero por ofertas del almacén todos los productos quedan rebajados en un 20% ¿Cuál será la rebaja? ¿Cuánto queda costando?

Solución por regla de tres

Para resolver problemas con porcentajes existen varias formas, mediante el uso de una fracción, de un decimal, de una proporcionalidad directa o utilizando la regla de tres, que es la que se utilizará en este momento.

Para utilizar la regla de tres, que se podría decir, es un caso especial del método de proporcionalidad directa, se debe tener en cuenta que la cantidad de referencia que se esté tomando, en este caso ***15800 será el 100%.***

A partir de esta relación dada, se puede completar la relación pedida, pero ya no como razones, sino colocando el valor de una variable en frente de la otra, tal como se muestra a continuación.

100%	15800
20%	x

Lo anterior se puede leer como "si el 100% son 15800, entonces el 20% a cuánto equivaldrá.

Para resolver una regla de tres, se puede utilizar la misma idea de las proporciones (multiplicación en cruz)

$$100\ x = 20\ \times 15800$$

$$x = \frac{20\ \times 15800}{100}$$

$$x = \frac{316000}{100}$$

$$x = 3160$$

De lo que se deduce que el 20% de descuento equivale a 3160, por lo que el nuevo precio, al hacerle el descuento sería (15800-3160) 12640

Solución por decimales

Otra forma más rápida de hallar el porcentaje de algo, es expresando el porcentaje en fracción o decimal y multiplicando por la cantidad de referencia.

Como 20% = 20/100 = 0.2

El resultado de aplicar dicho valor a 15800 sería

0.2 x 15800 = 3160

Recordemos que…

La unidad de medida base para medir longitudes es el metro, sin embargo dependiendo del tamaño de lo que se vaya a medir a veces se utilizan los submúltiplos (centímetro, decímetro o milímetro) o los múltiplos (decámetro, hectómetro o kilómetro)

Ejemplo 3

El largo de la cancha del colegio mide 12,8 metros, ¿a cuánto equivale esta distancia en centímetros?

Solución.

Para los problemas de conversiones, se requiere establecer la relación entre las dos unidades de medida que se están trabajando, en nuestro caso la relación entre los metros y los centímetros

1 m son 100 cm

Con esta relación podemos completar la relación pedida. Esto es, 12, 8 metros ¿cuántos centímetros son?

1m	100 cm
12,8 m	x

Resolviendo la regla de tres se obtiene

$$1\,x = 12\ .8 \times 100$$

$$x = 1280$$

Esto es, 12,8 metros equivalen a 1280 centímetros.

Proporcionalidad inversa

Dos variables están relacionadas de manera inversamente proporcional, si a partir de una relación dada entre estas, cuando una de ellas aumenta la otra se reduce en la misma cantidad. Por ejemplo, si una se duplica la otra se debe reducir a la mitad.

Este tipo de situaciones son menos comunes que las de proporcionalidad directa y es importante tener cuidado de no confundirlas, pues es un error muy frecuente.

Un ejemplo típico de este tipo de situaciones es que entre más gente esté haciendo algo, menos tiempo se demorará., de tal forma que si por ejemplo se duplicaran las personas, el tiempo se debería reducir a la mitad.

Como si una variable se duplica la otra se debe reducir a la mitad o si una se triplica la otra se debe reducir a la tercera parte, al multiplicar los valores iniciales de las variables se va a conservar siempre el producto inicial. Ya que multiplicar una cantidad inicial por algo y después dividirla por ese mismo factor, es como si no se hiciese nada.

Obsérvese que en las variables directamente proporcionales lo que se conservaba es la razón o división entre las variables, mientras que en las variables inversamente proporcionales lo que se conserva es el producto.

Teniendo en cuenta que los productos siempre van a ser iguales, a partir de la relación inicial, expresada como producto, se puede completar otra relación cualquiera también expresada como producto y siempre se formará una igualdad entre estos dos productos.

Ejemplo 1

3 estudiantes tienen arrendado un apartamento y les toca pagar de a 120000 a cada uno. Si traen otra persona más para pagar por partes iguales ¿De a cuánto le tocará pagar a cada uno?

Solución

Cómo entre más personas tengan que pagar algo les va a tocar de a menos dinero, de tal forma que si se duplica la cantidad de personas les tocaría aportar la mitad del dinero que aportaban inicialmente, estamos ante una relación de proporcionalidad inversa y por tanto el producto entre los valores relacionados de estas dos variables se conserva.

$$3 \times 12000 = 4x$$
$$360000 = 4x$$
$$\frac{36000}{4} = x$$
$$90000 = x$$

De lo que se deduce que tendrían que pagar de a 90000 pesos si viven 4 personas en el apartamento.

Ejemplo 2

3 obreros trabajando todos al mismo ritmo hacen una obra en 4 días, 4 obreros ¿cuántos días se demorarían?

Solución

Como entre más personas haciendo algo menos tiempo se demoran, la relación entre estas variables no es directa si no inversa, y por tanto, es el producto de los valores relacionados, lo que se conserva, esto es.

$$3 \times 4 = 4x$$
$$12 = 4x$$
$$\frac{12}{4} = x$$
$$3 = x$$

De donde se deduce que los 4 obreros se demorarán 3 días