LA DERIVATA

1. Introduzione

In matematica la **derivata** di una funzione è uno dei cardini dell'**analisi matematica[1].**

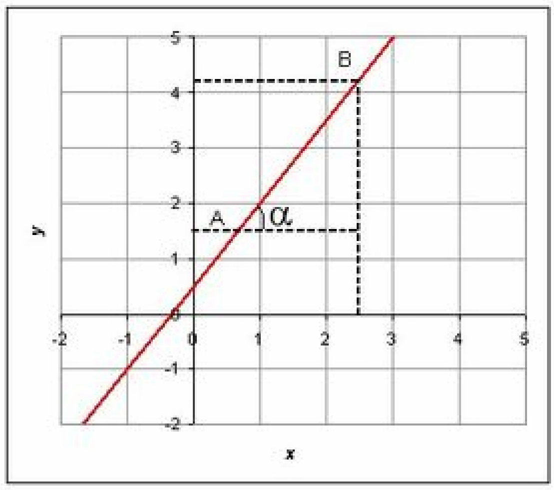
Un modo semplice di capire cos'è la derivata è guardare al suo significato geometrico: geometricamente la derivata di una funzione f in un punto x_0 è la misura della pendenza (il **coefficiente angolare**) della retta tangente alla curva rappresentata dal grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

A questo punto conviene rammentare alcuni concetti affrontati nel corso del terzo anno di studi.

In geometria analitica il **coefficiente angolare** di una retta nel piano cartesiano è il valore del parametro m dell'equazione della retta

$$y = mx + q.$$

Il parametro q rappresenta invece l'ordinata all'origine cioè l'intercetta della retta con l'asse delle ordinate, ovvero il punto $(0,q)$ in cui la retta interseca l'asse y.



Considerando la retta come funzione della variabile x ($f(x) = mx + q$), il coefficiente angolare esprime la derivata della retta (che è costante, poiché la funzione è un polinomio di primo grado e la curva ha la medesima pendenza in ogni suo punto x).

Il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine del sistema di assi coordinati è dato semplicemente dal rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di uno qualsiasi dei suoi punti. Per una retta generica, invece, date le coordinate cartesiane di due punti qualsiasi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ ad essa appartenenti, si può calcolare il coefficiente angolare mediante la formula:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Nel caso di funzioni di una sola variabile, continue e derivabili in tutto il loro dominio, o almeno in un intervallo di questo, si ricava con operazioni algebriche una nuova funzione che ne rappresenta la derivata al variare di x: nel linguaggio comune è a questa che ci si riferisce quando si parla genericamente di **derivata di una funzione**.

In analisi matematica la **derivata** di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ nel punto x_0 è definita come il limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento h, sotto l'ipotesi che tale limite esista e sia finito.

[1] L'**analisi matematica** è un ramo della matematica sviluppato sulla base dei concetti del *calcolo infinitesimale* cioè dello studio del "comportamento locale" di una funzione tramite la nozione di limite.

Più precisamente, una data funzione $f(x)$ definita in un intorno[2] di x_0 si dice **derivabile** nel punto x_0 se esiste ed è finito il limite:

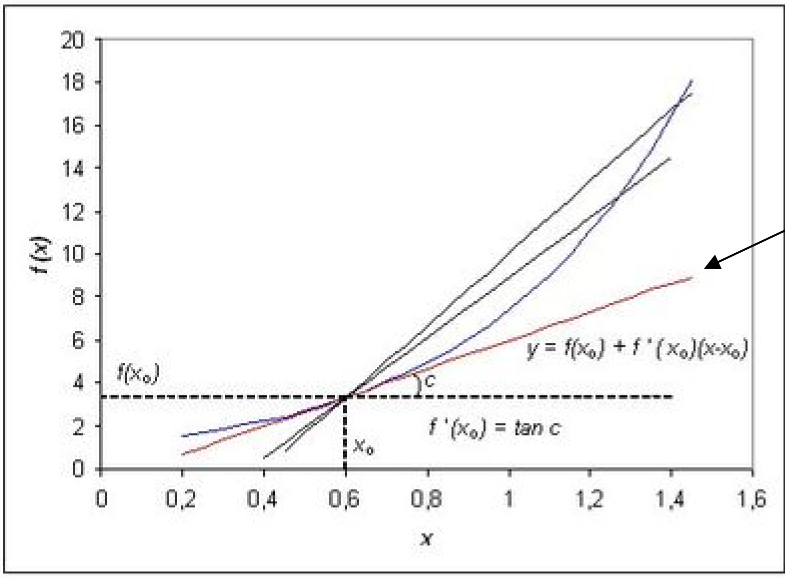
$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

ed il valore di questo limite, indicato normalmente con $f'(x_0)$, prende il nome di **derivata** della funzione nel punto x_0.

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in ogni punto di un dato intervallo (a, b), allora si dice che essa è derivabile in (a, b), e la funzione $f'(x)$ che associa ad ogni punto x la derivata di f in x è la **funzione derivata** di f.

La derivata nel punto x_0 viene indicata secondo la notazione di Lagrange[3] con il simbolo $f'(x_0)$.

2. Significato geometrico della derivata



La retta indicata dalla freccia è la tangente alla funzione f(x) nel punto x_0

Il valore della derivata di $f(x)$ calcolata in x_0 ha un significato geometrico: è il **coefficiente angolare della retta tangente alla curva rappresentata dal grafico di $f(x)$, nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$**.

L'equazione della retta tangente in x_0 risulta:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Teorema di continuità

Il teorema asserisce che se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora $f(x)$ è anche continua in x_0. Si noti che non vale il teorema inverso. Ad esempio, la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ è continua su tutto il dominio, ma non è derivabile nel punto $x = 0$.

[2] Un intorno di un punto x_0 è intuitivamente un insieme di punti "vicini" al punto x_0.

[3] Joseph-Louis Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813) matematico e astronomo.

4. Funzioni non derivabili

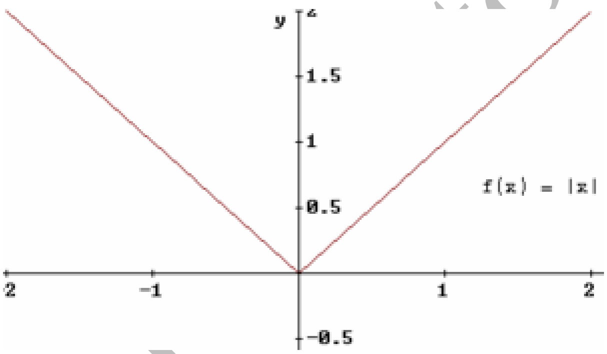
Una funzione continua può essere non derivabile. Tra i fenomeni che possono causare la non derivabilità di una funzione continua, ci sono i seguenti:

a. Punto angoloso

In analisi matematica, un **punto angoloso** è un punto x_0 del dominio di una funzione reale di una variabile reale $f(x)$ in cui esistono finite sia la derivata destra che la derivata sinistra, ma sono diverse tra di loro:

$$f'^{-}(x_0) \neq f'^{+}(x_0)$$

Un esempio di punto angoloso è $x_0 = 0$ per la funzione $f(x) = | x |$. Essendo f(x) = x per x > 0 e f(x) = - x per x < 0 si ha f'(x) = + 1 se x > 0 e f'(x) = -1 se x < 0. Nell'origine bisogna utilizzare la definizione.



$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

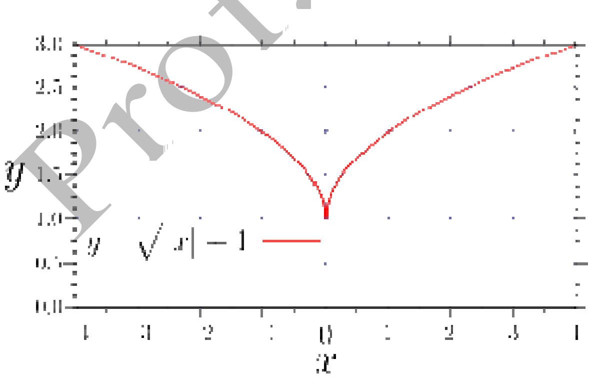
In questo modo si vede che per h che tende a 0^+ il limite del rapporto incrementale è 1, mentre per h che tende a 0^- il limite del rapporto incrementale è -1.

Poiché non esiste il limite del rapporto incrementale in x=0, la $f(x)$ non è derivabile in tale punto pur essendo continua.

b. cuspide

In analisi matematica, si dice che la funzione f ha una cuspide in x_0 se f è derivabile in un intorno di esso e si ha che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$



ed il primo è uguale a +∞ ed il secondo a -∞ (oppure viceversa).

Sono classificate in cuspidi di prima specie e di seconda specie, a seconda che i due archi si trovino sui due semipiani individuati dalle tangente t oppure si trovino entrambe nello stesso semipiano.

c. flesso a tangente verticale

Un **punto di flesso** per una curva o funzione è un punto in cui si manifesta un cambiamento di curvatura o di convessità. La definizione e lo studio dei punti di flesso fa largo uso del calcolo infinitesimale e più precisamente del concetto di derivata.

Se la funzione è derivabile due volte in tutti i punti vicini a x_0, e la derivata prima $f'(x)$ tende a infinito in x_0, si parla di "tangente verticale", e anche in questo caso il punto è di flesso se la derivata seconda cambia segno. Si parla di **flesso verticale**.

d. Regole di derivazione

Il calcolo di una derivata utilizzando la sua definizione prevede difficoltà di calcolo, di trasformazione e di semplificazione tali per cui si preferisce utilizzare le derivate di funzioni particolari associate ai teoremi di derivazione. Nello schema riportato sotto sono elencate alcune delle derivate di funzioni fondamentali e alcuni dei teoremi di derivazione più utilizzati.

Derivate di funzioni fondamentali	***Teoremi di derivazione***
$y = k \rightarrow y' = 0$	$y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$
$y = x \rightarrow y' = 1$	$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$
$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$	$y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = k \cdot f(x) \rightarrow y' = k \cdot f'(x)$
$y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)^2\right]}$
$y = \log_a x \rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \dfrac{1}{f(x)} \rightarrow y' = \dfrac{-f'(x)}{\left[f(x)^2\right]}$
$y = \ln x \rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$	
$y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a$	
$y = e^x \rightarrow y' = e^x$	