Función exponencial

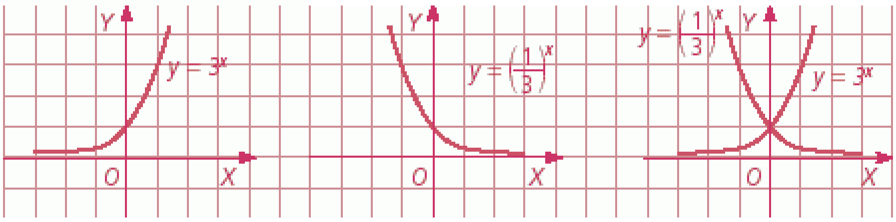
En la naturaleza y en la vida social existen numerosos fenómenos que se rigen por leyes de crecimiento exponencial. Tal sucede, por ejemplo, en el aumento de un capital invertido a interés continuo o en el crecimiento de las poblaciones. En sentido inverso, también las sustancias radiactivas siguen una ley exponencial en su ritmo de desintegración para producir otros tipos de átomos y generar energía y radiaciones ionizantes.

Definición de función exponencial

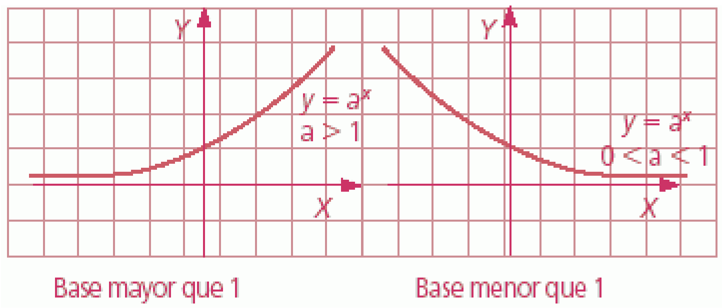
Se llama **función exponencial** de **base** a aquella cuya forma genérica es f (x) = a^x, siendo a un número positivo distinto de 1. Por su propia definición, toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales R.

La función exponencial puede considerarse como la inversa de la función logarítmica (ver t36), por cuanto se cumple que:

$$a^x = b \Longleftrightarrow \log_a b = x.$$



Representación gráfica de varias funciones exponenciales.



Función exponencial, según el valor de la base.

Propiedades de las funciones exponenciales

Para toda función exponencial de la forma f(x) = a^x, se cumplen las siguientes propiedades generales:

- La función aplicada al valor cero es siempre igual a 1:

  f (0) = a^0 = 1.

- La función exponencial de 1 es siempre igual a la base:

  $f(1) = a^1 = a$.

- La función exponencial de una suma de valores es igual al producto de la aplicación de dicha función aplicada a cada valor por separado.

  $f(x + x?) = a^{x+x?} = a^x \cdot a^{x?} = f(x) \cdot f(x?)$.

- La función exponencial de una resta es igual al cociente de su aplicación al minuendo dividida por la función del sustraendo:

  $f(x - x?) = a^{x-x?} = a^x/a^{x?} = f(x)/f(x?)$.

La función e^x

Un caso particularmente interesante de función exponencial es $f(x) = e^x$. El número e, de valor 2,7182818285..., se define matemáticamente como el límite al que tiende la expresión:

$(1 + 1/n)^n$

cuando el valor de n crece hasta aproximarse al infinito. Este número es la base elegida para los logaritmos naturales o neperianos (ver t34).

La función e^x presenta algunas particularidades importantes que refuerzan su interés en las descripciones físicas y matemáticas. Una de ellas es que coincide con su propia derivada (ver t41).

Ecuaciones exponenciales

Se llama **ecuación exponencial** a aquella en la que la incógnita aparece como **exponente**. Un ejemplo de ecuación exponencial sería $a^x = b$.

Para resolver estas ecuaciones se suelen utilizar dos métodos alternativos:

- **Igualación de la base**: consiste en aplicar las propiedades de las potencias para lograr que en los dos miembros de la ecuación aparezca una misma base elevada a distintos exponentes:

  $A^x = A^y$.

  En tales condiciones, la resolución de la ecuación proseguiría a partir de la igualdad $x = y$.

- **Cambio de variable**: consiste en sustituir todas las potencias que figuran en la ecuación por potencias de una nueva variable, convirtiendo la ecuación original en otra más fácil de resolver.

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 = 0 \overset{t=2^{x}}{\Leftrightarrow} t^{2} - 3t - 4 = 0$$

luego se ?deshace? el cambio de variable.

Por otra parte, un sistema de ecuaciones se denomina exponencial cuando en alguna de sus ecuaciones la incógnita aparece como exponente. Para la resolución de **sistemas de ecuaciones exponenciales** se aplican también, según convenga, los métodos de igualación de la base y de cambio de variable.

«« Logaritmos
Función logarítmica »»

El ajedrez y los granos de trigo

Una conocida leyenda oriental ofrece una descripción muy exacta de una función exponencial. Cuentan que un rey quiso premiar las dotes adivinatorias del sumo sacerdote que había predicho una extraordinaria victoria en una batalla. El sacerdote pidió 2 granos de trigo por la primera casilla de un tablero de ajedrez, 4 por la segunda, 8 por la tercera, y el doble cada vez por cada nueva casilla. El rey pareció complacido por la modestia del sacerdote... hasta que comprobó la magnitud de su petición: $2^{64} + 2^{63} + ... + 2^{2} + 2$ granos de trigo, una cantidad inimaginable, que no se almacenaba en todo el reino. Los sumandos de esta expresión responderían, en la notación matemática actual, a la función 2^{x}, para el dominio $x = 1, 2, 3, ..., 64$.

El interés continuo

El capital obtenido de la inversión de un capital inicial C0 a un interés compuesto r en n periodos anuales sigue la fórmula:
$C = C_0 (1 + r / n)^{nt}$,siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión (ver t12).

Se llama interés continuo a una inversión de este tipo en la que se considera que los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños, hasta que la acumulación de intereses es instantánea. La fórmula del interés continuo es de tipo exponencial:
$C = C_0 \cdot e^{rt}$.

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran paulatinamente transformándose en otras clases de átomos y emitiendo energía y radiaciones ionizantes. La ley de desintegración radiactiva es de tipo exponencial decreciente, de manera que si R_0 es la cantidad inicial de sustancia y k la constante de desintegración asociada al elemento químico, la

cantidad remanente al cabo de un tiempo t será:
$R = R_0 \times e^{-kt}$.

Crecimiento demográfico

Las curvas de crecimiento vegetativo de una población, establecido como la diferencia entre nacimientos y muertes para un intervalo de tiempo dado, siguen una ley exponencial. siendo P_0 la población inicial e i el índice de crecimiento anual en tanto por uno, y se considera una tasa de crecimiento continuo, la población seguirá la ley exponencial: $P = P_0 \times e^{it}$.