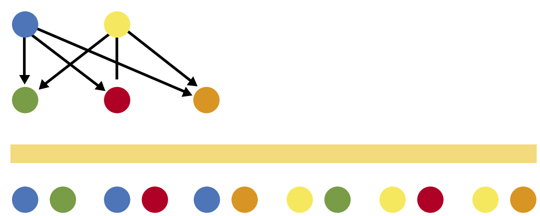
Multiplicación

Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 5



Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Multiplicación
Federación Internacional Fe y Alegría, 2005.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-71-9
Matemáticas, multiplicación.

"Hoy en día nos interesa educar a todos:

a los que aprenden fácilmente

y a los que les cuesta aprender; por ello

los educadores populares decimos

que optamos por los alumnos más débiles y

necesitados. Hoy contamos

con conocimientos científicos

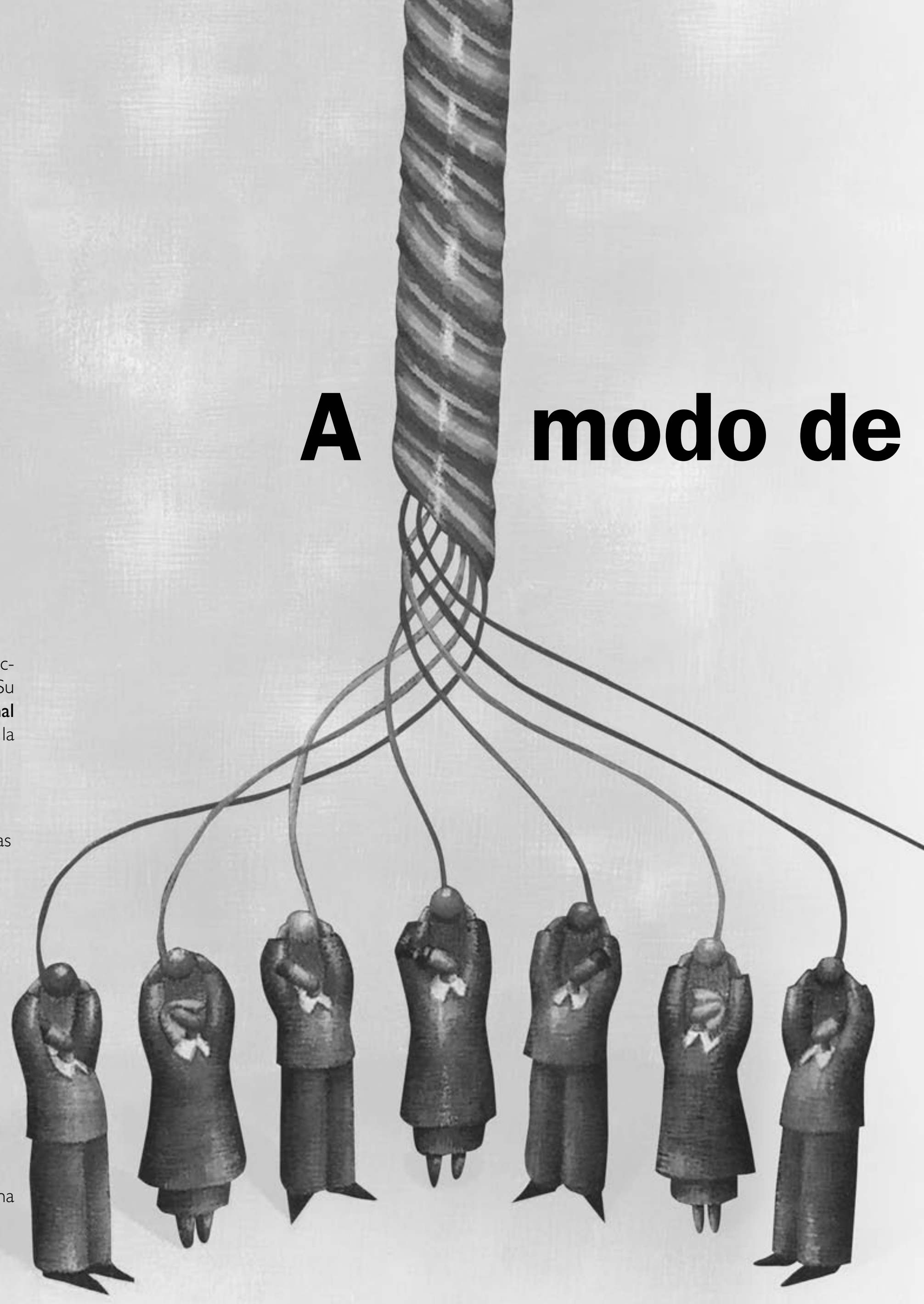
que nos pueden ayudar a desempeñar

mejor nuestra tarea".

Gabriela Alejandra Fairsten

y Silvana Gyssels

A modo de



Equipo editorial

María Bethencourt

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Multiplicación, número 5
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: María Bethencourt, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría.
Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia,
Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5645624 / 5645013 / 5632048
Fax (58) (212) 5646159
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf 603 2005 510 28 67
Caracas, septiembre 2005

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior
en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina
de Fomento (CAF)

introducción…

…y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

He aquí las tablas de multiplicar por 1, por 2 y por 3. Observe bien esta última, compárela con las dos anteriores y establezca sus conclusiones:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

1. Si un niño al cumplir **1** año tiene **6** dientes, ¿cuántos dientes tendrá al cumplir **7** años?

2. *Un número de **dos** cifras diferentes de cero equivale al doble del producto de sus cifras. ¿De qué número se trata?*

3. Cuando mi papá tenía **31** años, yo tenía **8**. Ahora su edad es **el doble** de la mía. ¿Cuántos años tengo actualmente?

4. *En un grupo de **63** personas, el número de niños es **el doble** del de adultos. Entre estos últimos, el número de mujeres es **el doble** del de hombres. ¿Cuántos hombres hay en el grupo?*

5. Los signos * esconden diversos dígitos en la siguiente multiplicación. Descúbralos:

```
      * 1 *
      3 * 2
      -----
      * 3 *
    3 * 2 *
  * 2 * 5
  ---------
  1 * 8 * 3 0
```

(*) **Aviso a los navegantes:** Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número no las encontrarás en este Cuaderno. Dichas respuestas son para que las construyas y valides con tu grupo de trabajo.

6. *En la escuela se han comprado **145** kg de abono para las plantas. El producto viene en **12** sacos, unos de **15** kg y otros de **10** kg. ¿Cuántos sacos de cada tipo se han comprado?*

He aquí ahora las tablas de multiplicar por **1**, por **2**, por **4** y por **8**. Compare la del 2 con la del 1, la del 4 con la del 2, y la del 8 con la del 4. ¿Hay algo común en estas tres comparaciones?

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

7. Si el producto de **5** números es impar, ¿cuántos de éstos deben ser necesariamente impares?

8. El herrero cobra **700** pesos por cortar en dos partes iguales una barra metálica. ¿Cuánto cobrará por cortar otra barra similar en **8** partes iguales?

9. *Un saco de café de **75** kg se compra a **450** pesos el kg. Después de tostado, el saco de café pesa **61** kg y se vende a **650** pesos el kg. ¿Qué beneficio se obtiene por saco?*

10. Entre los siguientes números: **527**, **248**, **200**, **326**, **212**, **500**, **111**, **224**, hay uno que no sigue el patrón de los demás. ¿Cuál es?

11. Complete las casillas del siguiente cuadro:

3	x		+		= 1
+	■	x	■	+	■
	x	6	–		= 8
+	■	+	■	+	■
	x		–		= 2
= 7	■	=3	■	= 9	■

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno N° 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

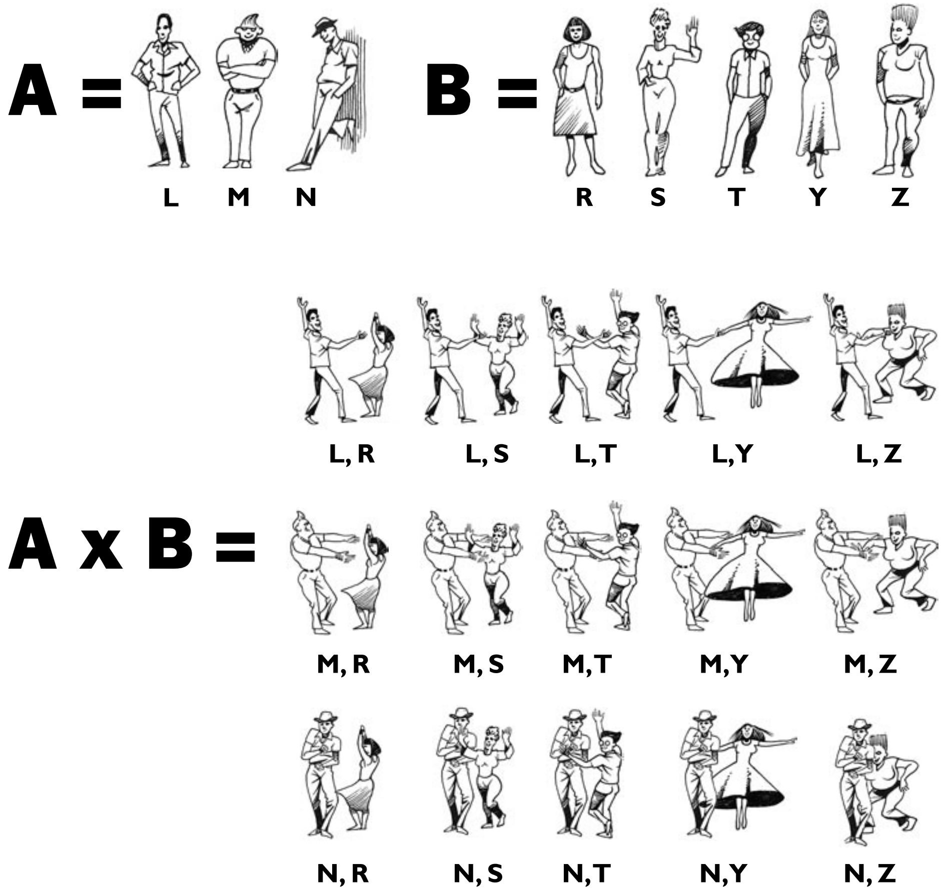
Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la multiplicación.

1. ¿Qué es la multiplicación de números naturales?

Al igual que en el caso de la adición y de la sustracción, la primera respuesta que se nos ocurre es que, evidentemente, se trata de una operación aritmética según la cual, a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, su producto. Así, al par (3 , 5) se le hace corresponder el número 15 (3 x 5); al par (10, 1), el número 10 (10 x 1); al par (7 , 0), el número 0 (7 x 0), etc.

La anterior es una manera "formal" de decir las cosas, pero con esto tampoco nos aclaramos mucho, ya que debemos precisar cómo se multiplica, es decir, cómo se llega a 15 partiendo de 3 y de 5.

Para ello vamos a referirnos a dos conjuntos, **A** y **B**, cuyas características y relación mutua no son relevantes. Supongamos ahora que A cuenta con 3 elementos y B con 5 (recordemos que, en términos formales, se dice que el *cardinal* de A es 3 y que el de B es 5). A partir de los dos conjuntos podemos formar otro nuevo, el *conjunto producto cartesiano de A y B*.

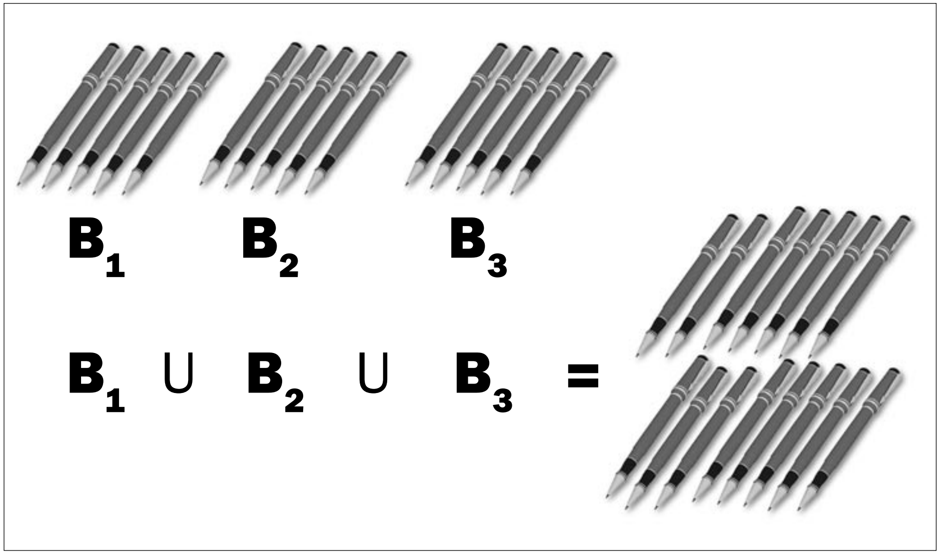


Este nuevo conjunto es de naturaleza distinta a la de A y B, porque no está formado por elementos similares a los de ambos –cosa que sí ocurría en los casos de la adición y la sustracción–. Efectivamente, los elementos que lo componen son *pares de elementos* tomados el primero de A y el segundo de B.

Así, por ejemplo, si **A** = {Luis, Manuel, Néstor} y **B** = {Rosa, Silvia, Tere, Yolanda, Zuleima}, el conjunto **A x B** –que podría ser el conjunto de todas las posibles parejas (hombre , mujer) para un baile– será (utilizando las iniciales de las personas): {(L, R), (L, S), (L, T), **(L, Y)**, **(L, Z)**, **(M, R)**, **(M, S)**, **(M, T)**, **(M, Y)**, **(M, Z)**, **(N, R)**, **(N,** S), (N, T), (N, Y), (N, Z)}. Obsérvese que hay **15** pares –15 elementos– en A x B. Pues bien, la *multiplicación* del cardinal de A por el cardinal de B es *el cardinal del conjunto producto cartesiano A x B*. En nuestro caso, 3 x 5 = 15.

Así que, para pensar en la multiplicación de dos números, debemos imaginarnos que hay dos conjuntos; que uno de ellos posee tantos elementos como lo indica uno de los números; que el otro posee tantos elementos como lo indica el otro número a multiplicar; que se construye el conjunto producto cartesiano de los dos conjuntos dados; y que se cuentan los elementos –pares de números– de este nuevo conjunto. El resultado final de este conteo es el producto de los dos números iniciales.

La multiplicación de dos números naturales representa, pues, el cardinal del conjunto producto cartesiano de dos conjuntos, en el supuesto de que uno de los dos números representa inicialmente el cardinal de un conjunto, y el otro, el del otro conjunto.



Lo que va hasta aquí es la respuesta matemática formal a la pregunta de qué es la multiplicación. Sin embargo, al (la) lector(a) debe estarle sonando por dentro lo que siempre se ha dicho: que la multiplicación de números naturales es una *suma reiterada*. Y, aparentemente, la presentación formal anterior no cuadra con esta última versión. Es importante que aclaremos esta dualidad.

Pensar la multiplicación de números naturales como una suma reiterada nos lleva también a su representación en el terreno de los conjuntos. Así, 3 x 5, entendido como "3 veces 5", significa que tenemos un conjunto B_1 compuesto por **5** elementos (por ejemplo, bolígrafos), que se va a unir con otros dos conjuntos similares, B_2 y B_3, también con **5** lápices cada uno: $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ ($\cup$ es el símbolo de la unión de conjuntos). Lógicamente, este conjunto posee **5 + 5 + 5 = 15** elementos. [Obsérvese que no puede hablarse de un mismo conjunto B "repetido" tres veces, es decir, del conjunto $B \cup B \cup B$, ya que este conjunto tendría sólo 5 elementos. En efecto, recuérdese que para poder "sumar" los cardinales de cada conjunto es preciso que los conjuntos que se unen sean disjuntos, es decir, que no posean ningún elemento común].

Este resultado –15 elementos– es el mismo que el obtenido anteriormente, cuando pensamos en la multiplicación como el cardinal del conjunto producto cartesiano de **A x B**. La diferencia no está, pues, en el resultado, sino en el significado de cada conjunto A y B, y de sus respectivos cardinales.

Porque, ¿quién es el conjunto A cuando hablamos de "3 veces 5"? ¿Y cómo asociamos el 3 al conjunto A? Indudablemente, no podemos pensar en que A tiene 3 elementos similares a los de B_1; es decir, A no es un conjunto de 3 lápices. A es un conjunto cuyos 3 elementos son, precisamente, los tres conjuntos B: $A = \{B_1, B_2, B_3\}$. El cardinal de A es 3, ciertamente, pero la naturaleza del conjunto A es diferente de la naturaleza de los B.

Otra característica en la que difieren ambos enfoques de la multiplicación es la relativa al significado de las propiedades de esta operación. Así, por ejemplo con la conmutatividad, decimos que es igual 3 x 5 que 5 x 3. En el enfoque de la multiplicación como cardinal del conjunto producto cartesiano, esto significa que el cardinal de A x B es el mismo que el de B x A, lo cual es cierto: siempre hay 15 parejas, aun cuando en el segundo caso el orden para nombrar a cada pareja sería ahora el inverso: (mujer, hombre).

En cambio, en el enfoque de la multiplicación como "suma reiterada", 3 x 5 significa "3 veces 5", y 5 x 3, "5 veces 3". En ambos casos se tendrán 15 elementos. Pero en el primero significa que hay un conjunto formado por 3 conjuntos de 5 lápices cada uno; mientras que en el segundo, que hay un conjunto formado por 5 conjuntos de 3 lápices cada uno. El 3 y el 5 tienen, en cada caso, un papel totalmente diferente. En el primero, 3 opera como un simple numerador, mientras que el numerador 5 va acompañado del denominador "lápices"; en el segundo, los papeles se cambian.

Lo importante es percibir las diferencias presentes entre ambos enfoques del concepto de multiplicación de números enteros, así como lo que tienen en común, que es la coincidencia del resultado de la operación. Digamos que el primer enfoque –producto cartesiano– es ***matemáticamente más formal*** y que el segundo –suma reiterada– es ***pedagógicamente más apto*** para iniciar la andadura desde los predios de la adición.

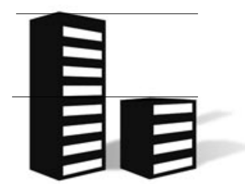
La multiplicación es, pues, una operación aritmética cuyo resultado –el ***producto*** de dos números– puede interpretarse como el ***resultado de una suma reiterada*** –aunque no es lo mismo ni puede reducirse simplemente a ello– o como el ***cardinal de un conjunto producto cartesiano*** de otros dos conjuntos (Castro, Rico, Castro, 1988; Maza, 1991).

Como vemos, la consideración formal de la multiplicación de números naturales requiere de ciertas puntualizaciones teóricas que debemos conocer y comprender. Pero esta presentación formal no es, afortunadamente, la única respuesta a la pregunta acerca de qué es esta operación. Porque la multiplicación también puede ser vista como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber. En este sentido, la multiplicación se convierte en una herramienta que nos permite interpretar matemáticamente las situaciones que se presentan en nuestra vida.

¿Y cuáles, o de qué naturaleza, son estas situaciones para las que la multiplicación puede presentarse como modelo? Fundamentalmente, cuatro:

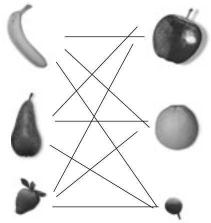
1. Situaciones de *reiterar* una cantidad dada.

2. Situaciones de *hallar el valor de algún atributo* (medida, peso, costo…) *en varias unidades*, conociendo el de una unidad.



3. Situaciones de *obtener una cantidad que sea un cierto número de veces mayor* que otra. Y como caso particular, *reducir unidades de orden superior* a unidades de orden inferior.

4. Situaciones de *averiguar el número de parejas diferentes* que se pueden formar con los elementos de dos conjuntos, tomando uno de cada uno en cada pareja.



Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto– por verbos tales como reiterar, duplicar, triplicar, ..., hacerlo tantas veces mayor, y los propios de cada situación particular. Además, y como puede observarse, las situaciones 2 y 3 son casos particulares de la primera, y las tres responden a la perspectiva de la multiplicación como suma reiterada. Por su parte, la situación 4 es un reflejo directo de la consideración conceptual de la multiplicación como cardinal del conjunto producto cartesiano de dos conjuntos.

En resumen, hay dos formas de considerar la multiplicación: como un ***modelo de situaciones de la vida diaria*** y como un ***objeto de estudio formal*** dentro de la matemática.

No hay contradicción entre ambas formas de considerar la multiplicación, sino más bien complementariedad. Pero sí conviene resaltar que en el proceso de adquisición del concepto, de los procedimientos y de las destrezas propias de la operación, es preferible entrar por la vía del modelo de situaciones –y particularmente por las que hacen referencia a la perspectiva de suma reiterada– y considerar el estudio formal –con su lenguaje específico– como una meta a alcanzar posteriormente.

Podemos precisar ahora los términos propios y formales para las cantidades que intervienen en la operación de multiplicación de números naturales:

• ***Multiplicando***: cantidad que se multiplica o se suma reiteradamente.
• ***Multiplicador***: cantidad que indica el número de veces que se reitera el multiplicando.
• ***Factor***: indistintamente, cada una de las cantidades que se multiplican.
• ***Producto***: resultado de efectuar la multiplicación, bien en el caso de la suma reiterada, o en el del cardinal del conjunto producto cartesiano de dos conjuntos.

Observemos que los dos primeros términos de esta nomenclatura responden más directamente a la perspectiva de la multiplicación como suma reiterada, mientras que el producto se refiere siempre al resultado de la multiplicación.

2. Las tablas de multiplicar

La resolución de las situaciones en las que la multiplicación opera como modelo pasa –como en los casos de la adición y de la sustracción– por el manejo de las operaciones en el terreno abstracto de los numeradores sin denominadores, es decir, de los puros números. Las tablas de multiplicar muestran precisamente la forma concreta y básica en que se presentan los productos entre los diez primeros números significativos.

¿Cómo construir esas tablas? Según se ha dicho anteriormente, el enfoque de la multiplicación como suma reiterada resulta pedagógicamente más apto como vía para entender y obtener el producto de dos números naturales. Justamente, sumar repetidamente una misma cantidad (multiplicando) es la forma de ir construyendo progresivamente cada tabla de multiplicar.

De esta forma puede obtenerse la siguiente tabla de doble entrada en la que:

• las cabeceras de las filas y las columnas representan los factores (en **negrita**)
• el número en cada casilla interior expresa el producto de los dos factores que encabezan la fila y la columna correspondientes a esa casilla.

• cada fila, o cada columna, representa la tabla de multiplicar del número que la encabeza.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Pudiera pensarse que el "trabajo" con las tablas de multiplicar se reduce a construirlas –por la vía de las sumas reiteradas– y a aprenderlas de memoria. Sin embargo, no es así. Como vamos a ver, es mucho más –y más significativo– lo que se puede "hacer" con ellas y a partir de ellas (en lo que sigue leeremos las tablas de multiplicar horizontalmente, por filas).

Previamente, vamos a introducir dos conceptos aritméticos, el de *doble* de un número y el de *mitad* de un número. Para ello, partimos de la adición de números y, en particular, del cálculo mental correspondiente a la suma de un dígito consigo mismo [Ver Cuaderno 3]. Sobre esta base, pensar en el doble de un número como una suma significa que el número en cuestión se disocia de acuerdo a las diversas unidades del sistema numérico decimal que lo componen. Y que luego se busca el doble del dígito correspondiente a cada unidad.

Así, por ejemplo, calcular el doble de **241** se procesaría de este modo: "El doble de **200** es **400**; el de **40**, **80**; y el de **1**, **2**. El doble de **241** es **482**". Y si se trata del doble de **957**: "El doble de **900** es **1.800**; el de **50** es **100** (con lo que llegamos a **1.900**); y el de **7** es **14**. El doble de **957** es **1.914**". Como se ve, procedemos de izquierda a derecha.

El cálculo de la mitad de un número par se desarrollaría sobre la base de una previa ejercitación con los dobles de números. Así, la mitad de **1.624** se procesaría de este modo: "La mitad de **1.000** es **500**; la de **600** es **300** (llevamos **800**); la de **20** es **10** (llevamos **810**); y la de **4** es **2**. La mitad de **1.624** es **812**". Análogamente, para la mitad de **718**: "La mitad de **700** es **350**; la de **10** es **5** (llevamos **355**); y la de **8** es **4**. La mitad de **718** es **359**".

Obtenga mentalmente el doble de los siguientes números:
57 109 376 1.050 3.984
7.896 13.408 299

Y la mitad de los siguientes números:
612 98 394 1.084 2.136
5.348 7.390 10.972

Propóngase otros ejercicios similares

A partir de esta ejercitación podemos asomarnos de nuevo a la anterior tabla de doble entrada y dedicarnos a un amplio proceso de *observación* (y de paso responderemos a un par de ejercicios propuestos al inicio del Cuaderno…).

Estas son las tareas de observación que le proponemos ahora. Por favor, vaya a la tabla, efectúe los análisis que se indican, saque sus conclusiones y, posteriormente, regrese y siga leyendo:

1. observe la tabla de multiplicar del 1
2. observe la tabla de multiplicar del 10
3. compare la tabla de multiplicar del 2 con la del 1
4. compare la tabla de multiplicar del 4 con la del 2
5. compare la tabla de multiplicar del 8 con la del 4
6. compare la tabla de multiplicar del 5 con la del 10
7. compare la tabla de multiplicar del 3 con las del 1 y del 2
8. compare la tabla de multiplicar del 9 con las del 10 y del 1
9. compare la tabla de multiplicar del 6 con la del 3

PARADA OBLIGATORIA

Como resultado de este proceso de observación podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. Multiplicar por **1** es *dejar intacto el otro factor*. Así, **1 x 938 = 938**.

2. Multiplicar por **10** significa *agregar un 0 al otro factor*. Así, **10 x 507 = 5.070**.

3. Los productos de la tabla del **2** son **el doble** de los correspondientes de la tabla del **1**. Por consiguiente, multiplicar por **2** significa *obtener el doble del otro factor*. Así, **2 x 79** es el doble de **79**: El doble de **70** es **140**; y el de **9** es **18** (llevamos **158**). De donde: **2 x 79 = 158**. [Lo que queremos indicar con este ejemplo es que, una vez captada la tabla del 2 como la que "obtiene el doble de", ya es posible multiplicar inmediatamente cualquier número por 2. Es decir, percibimos que la tabla del 2 no termina en 2 x 10]

4. Los productos de la tabla del **4** son **el doble** de los correspondientes de la tabla del **2**. Por consiguiente, multiplicar por **4** significa *obtener dos veces consecutivas el doble a partir del otro factor*. Así, **4 x 79** pasa por obtener el doble de **79** –que es **158**– y obtener ahora el doble de este último número, con lo que se llega a **316**. Valen los comentarios finales del caso anterior.

5. Los productos de la tabla del **8** son **el doble** de los correspondientes de la tabla del **4**. Por consiguiente, multiplicar por **8** significa *obtener tres veces consecutivas el doble a partir del otro factor*. Así, **8 x 79** pasa por obtener el doble de **79** –que es **158**–, el doble de **158** –que es **316**–, y el doble de este último número, que es **632**. También valen los comentarios finales del caso 3.

6. Los productos de la tabla del **5** son **la mitad** de los correspondientes de la tabla del **10**. Por consiguiente, multiplicar por **5** equivale a *agregar un 0 al otro factor y luego obtener la mitad de este último número*. Así, **5 x 79** equivale a la mitad de **790**: La mitad de **700** es **350**; y la de **90** es **45** (llevamos **395**). De donde: **5 x 79 = 395**. Siguen valiendo los comentarios finales del caso 3.

7. Los productos de la tabla del **3** son **la suma** de los correspondientes de la tabla del **2** y del **1**. Por consiguiente, multiplicar por **3** significa *obtener el doble del otro factor* (multiplicarlo por **2**) *e, inmediatamente, sumarle el mismo factor* (multiplicado por **1**). Así, **3 x 79** equivale a obtener el doble de **79** –que es **158**– y sumar **79** a **158**, con lo que se llega a **237**. De donde: **3 x 79 = 237**. Valen los comentarios finales del caso 3.

8. Los productos de la tabla del **9** son **la diferencia** de los correspondientes de la tabla del **10** y del **1**. Por consiguiente, multiplicar por **9** equivale a *agregar un 0 al otro factor y luego restarle el mismo factor*. Así, **9 x 79** equivale a restar **79** de **790**; es decir, restarle **80** (llevamos **710**) y agregarle **1**. De donde: **9 x 79 = 711**. También valen los comentarios finales del caso 3.

9. Finalmente, los productos de la tabla del **6** son **el doble** de los correspondientes de la tabla del **3**. Pero también son **la suma** de los correspondientes de la tabla del **4** y del **2**. O **la suma** de los correspondientes de la tabla del **5** y del **1**… Saque sus propias conclusiones…

Como puede verse, esta "lectura" de las tablas de multiplicar nos permite manejarlas de una forma diferente: en lugar de aprendernos de memoria los productos –cosa que también tenemos que hacer– vemos cada tabla desde una perspectiva integral, es decir, desde el punto de vista de *lo que hace con cualquier factor*.

Obsérvese también que todos los productos de todas las tablas se obtienen mediante operaciones muy simples: agregar un 0, hallar el doble, hallar la mitad, sumar y restar números. La tabla menos "penetrable" es la del 7 –aunque puede verse como la suma de la del 5 y del 2, o la diferencia de la del 8 y del 1…–, pero al disponer de los productos de las demás tablas, de una vez quedan incluidos los productos de la tabla del 7.

Efectúe mentalmente los siguientes productos, tomando como referencia la perspectiva mostrada anteriormente:

2 x 367	*5 x 613*	*3 x 150*
8 x 135	*9 x 17*	*6 x 75*
5 x 147	*2 x 835*	*5x 130*
4 x 75	*3 x 225*	*9 x 250*
8 x 350	*5 x 380*	*6 x 125*
3 x 95	*9 x 67*	*2 x 555*

3. El desarrollo de destrezas para multiplicar

El enfoque con el que acabamos de estudiar las tablas de multiplicar ya nos ha puesto en el camino del desarrollo de destrezas para multiplicar, más allá del mero uso memorístico de los productos presentados en dichas tablas. Con el fin de fundamentar y ampliar este campo de destrezas vamos a analizar las *propiedades de la multiplicación*, tan sabidas como tan poco utilizadas:

1. Conmutativa: El orden en que se consideran dos factores no modifica su producto. Por ejemplo, multiplicar 7 por 5 ó multiplicar 5 por 7 produce el mismo resultado.

2. Asociativa: Si hay más de dos factores, el orden progresivo en que "entran" en la multiplicación es indiferente: el resultado siempre es el mismo. Por ejemplo, si hay que multiplicar **5**, **7** y **2**, puede hacerse en cualquier orden: 5 por 7 y luego por 2, ó 7 por 2 y luego por 5, ó 2 por 5 y luego por 7 (mejor de esta última manera, ¿no?), etc.

3. Disociativa (es decir, la misma propiedad asociativa, pero al revés): Algunos factores pueden descomponerse en partes o factores menores, siempre que su "asociación multiplicativa" equivalga al factor inicial. Por ejemplo, si hay que multiplicar **18** por **35**, se facilita la operación si 18 se disocia (mentalmente, en la práctica) en 9 x 2, y 35 en 5 x 7, lo que permite un reacomodo en la multiplicación: **18 x 35 = 9 x 2 x 5 x 7 = (9 x 7) x (2 x 5) = 63 x 10 = 630**.

4. Existencia de un elemento neutro: Es decir, el **1**; cuando multiplica a una cantidad, ésta no varía.

5. Existencia de un elemento reductor: Es decir, el **0**; cuando multiplica a un número, el producto es 0. A la vista de estas dos últimas propiedades se puede romper la falsa creencia de que multiplicar dos números naturales siempre produce un resultado mayor que ambos factores…

6. Distributiva con respecto a la suma y a la resta: Cuando uno de los factores es una suma indicada, el otro factor puede multiplicar a cada uno de los sumandos, o bien a la suma de los mismos. Análogamente, cuando uno de los factores es una resta indicada, el otro factor puede multiplicar al minuendo y al sustraendo, o bien a la diferencia de los mismos. En términos simbólicos (las letras simbolizan cualquier número natural):

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

Lo destacable de esta propiedad es que nos permite mayor libertad a la hora de efectuar las multiplicaciones. Por ejemplo:

23 x 4 $= (20 + 3) \times 4 = 20 \times 4 + 3 \times 4 = 80 + 12 = 92$
99 x 7 $= (100 - 1) \times 7 = 100 \times 7 - 1 \times 7 = 700 - 7 = 693$

Si **493 x 25 = 12.325**, entonces **497 x 25 = (493 + 4) x 25 = 12.325 + 100 = 12.425**

También es muy importante la lectura de esta propiedad de derecha a izquierda:

$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$; $a \times b - a \times c = a \times (b - c)$

situación que se reconoce como la operación de "sacar factor común" y que supone la habilidad de "disociar" un número en sus posibles factores. Así, por ejemplo (lo que sigue se resuelve mentalmente; aquí sólo indicamos los pasos que se dan):

48 – 15 = 3 × 16 – 3 × 5 = 3 × (16 – 5) = 3 × 11 = **33**

56 + 144 = 8 × (7 + 18) = 8 × 25 = **200**

Como puede apreciarse, ésta es otra forma de ver los números y de operar con ellos, cuya principal característica es que convierte una operación de suma o resta en una multiplicación; transformación cualitativa que puede resultar de mucho interés en algunos casos.

Como un detalle complementario podemos apreciar cómo la "forma de operar" de las tablas del 4 y del 8 se apoya en la propiedad disociativa (4 = 2 x 2 y 8 = 2 x 2 x 2), mientras que la de las tablas del 3 y del 9 lo hace en la propiedad distributiva (3 = 2 + 1 y 9 = 10 – 1).

De lo anterior tiene que quedarnos algo bien claro: las propiedades de la multiplicación no son simplemente para aprenderlas –porque forman parte de lo que hay que saber–, sino sobre todo para utilizarlas. Porque las propiedades están ahí para *facilitarnos la operación de la multiplicación*, para darnos mayor *libertad* a la hora de multiplicar.

De esta forma entramos de nuevo en los predios del *cálculo mental* (y de la *estimación*, como veremos más tarde), que es simplemente el cálculo que se hace *utilizando las propiedades de la multiplicación*.

Atención:

Todo lo que se va a decir ahora no es sólo para entenderlo. Es, sobre todo, para practicarlo. Pero no un par de veces, y ya. La ejercitación frecuente y abundante es requisito indispensable para desarrollar destrezas de cálculo mental. Y esto es muy importante, porque si no las poseemos no podremos construirlas con nuestros alumnos.

Para resolver ejercicios de multiplicación por la vía del cálculo mental contamos no sólo con las propiedades de la multiplicación ya mostradas, sino también con las de las operaciones previas, suma y resta. Todo esto nos da un agregado de maneras diferentes de proceder (una matemática que genere diversidad…) cuyo inicio siempre es el mismo: *observar los factores* en juego. Veamos algunas situaciones en particular (en lo que sigue, se mostrarán de nuevo los cálculos escritos como una orientación del proceso mental, pero tales cálculos no se escriben en la práctica).

1. *Disociación multiplicativa en un factor o en ambos, seguida de conmutatividad y asociatividad entre los nuevos factores:*

36 x 5 = (18 × 2) × 5 = 18 × (2 × 5) = 18 × 10 = **180**

12 x 45 = (6 × 2) × (5 × 9) = (6 × 9) × (2 × 5) = 54 × 10 = **540**

24 x 75 = (6 × 2 × 2) × (3 × 5 × 5) = (6 × 3) × (2 × 5) × (2 × 5) = 18 × 10 × 10 = **1.800**

72 x 15 = (36 × 2) × (5 × 3) = (36 × 3) × (2 × 5) = 108 × 10 = **1.080**

16 x 41 = 2 × 2 × 2 × 2 × 41 = 2 × 2 × 2 × 82 = 2 × 2 × 164 = 2 × 328 = **656**

53 x 12 = 53 × 2 × 2 × 3 = 106 × 2 × 3 = 212 × 3 = **636**

Si 46 x 54 = 2.484, entonces 92 x 54 = 2 x 46 x 54 = 2 x 2.484 = 4.968.

2. *Disociación aditiva o sustractiva en un factor y aplicación de la distributividad por medio del otro factor:*

82 x 5 = (80 + 2) × 5 = 80 × 5 + 2 × 5 = 400 + 10 = 410

156 x 9 = 156 × (10 – 1) = 156 × 10 – 156 × 1 = 1.560 – 100 – 50 – 6 = 1.404

7 x 73 = 7 × (70 + 3) = 7 × 70 + 7 × 3 = 490 + 21 = 511

180 x 15 = 180 × (10 + 5) = 180 × 10 + 180 × 5 = 1.800 + 900 = 2700

37 x 11 = 37 × (10 + 1) = 37 × 10 + 37 × 1 = 370 +37 = 407

53 x 12 = 53 × (10 + 2) = 53 × 10 + 53 × 2 = 530 + 100 + 6 = 636

99 x 48 = (100 – 1) × 48 = 100 × 48 – 1 × 48 = 4.800 – 48 = 4.752

110 x 13 = (100 + 10) × 13 = 100 × 13 + 10 × 13 = 1.300 + 130 = 1.430

62 x 52 = (60 + 2) × 52 = 60 × 52 + 2 × 52 = 60 × (50 + 2) + 2 × (50 + 2) = 60 × 50 + 60 × 2 + 2 × 50 + 2 × 2 = 3.000 + 120 + 100 + 4 = 3.224

Como puede apreciarse, es posible seguir diversos caminos para llegar al mismo resultado:

16 x 25 = 4 × 2 × 2 × 5 × 5 = 4 × 10 × 10 = **400**

16 x 25 = 16 × (20 + 5) = 16 × 2 × 10 + 16 × 5 = 32 × 10 + 160/2 = 320 + 80 = **400**

16 x 25 = (10 + 6) × 25 = 10 × 25 + 3 × 2 × 25 = 250 + 3 × 50 = 250 + 150 = **400**

16 x 25 = 2 × 2 × 2 × 2 × 25 = 2 × 2 × 2 × 50 = 2 × 2 × 100 = 2 × 200 = **400**

16 x 25 = (20 – 4) × 25 = 20 × 25 – 4 × 25 = 10 × 2 × 25 – 2 × 2 × 25 = 10 × 50 – 2 × 50 = 500 – 100 = **400**

Efectúe mentalmente las siguientes multiplicaciones. Resuelva cada una por todas las vías que se le ocurran. Luego agregue otros ejercicios por su cuenta:

5 x 36	*4 x 85*	*23 x 9*	*6 x 55*
11 x 29	*15 x 15*	*3 x 97*	*7 x 43*
12 x 75	*15 x 24*	*81 x 16*	*19 x 31*
51 x 99	*27 x 15*	*36 x 125*	
1.100 x 17		*3 x 15*	
101 x 95	*28 x 25*	*8 x 125*	*91 x 15*
48 x 11	*24 x 150*		*63 x 12*
125 x 18			

4. La multiplicación en el sistema decimal de numeración

Hasta ahora se han resuelto los ejercicios de multiplicación sobre la base del conocimiento de las tablas de multiplicar y de la utilización de las propiedades de la operación. Pero no todas las multiplicaciones pueden realizarse con soltura por esta vía. Basta con tener grandes cantidades como factores. En este caso –y, en general, en cualquier otro–, procedemos basándonos en las tablas de multiplicar y en las potencialidades del sistema de numeración decimal. Y distinguimos dos casos: el de ambos factores enteros, y el de al menos un factor decimal.

Multiplicación de dos factores enteros

Supongamos que se trata de multiplicar **427 x 38**. Ya sabemos que esto significa multiplicar (**400 + 20 + 7**) x (**30 + 8**) y que por consiguiente, mediante una extensión de la propiedad distributiva, tendríamos que vernos con la multiplicación de centenas por decenas (**400 x 30**), de decenas por decenas (**20 x 30**), y de unidades por centenas (**8 x 400**), por decenas (**8 x 20 y 7 x 30**) y por unidades (**7 x 8**).

Para clarificar esta complejidad vamos a trabajar con la multiplicación de las diversas unidades del sistema de numeración decimal. Así, por ejemplo, ¿qué significa **10 x 100**? Puede entenderse como "**10 veces 100**" ó "**10 centenas**". Y sabemos que ambas expresiones equivalen a **1 unidad de mil**. Siguiendo esta forma de razonar podemos elaborar una tabla como la siguiente:

Multiplicación	Interpretación	Resultado	Producto
10 x 100	10 centenas	1 unidad de mil	10 x 100 = 1.000
100 x 100	100 centenas	1 decena de mil	100 x 100 = 10.000
1.000 x 100	1.000 centenas	1 centena de mil	1.000 x 100 = 100.000
10 x 1	10 unidades	1 decena	10 x 1 = 10
10 x 10	10 decenas	1 centena	10 x 10 = 100
10.000 x 10	10.000 decenas	1 centena de mil	10.000 x 10 = 100.000

Esta tabla puede prolongarse todo lo que se desee, pero no hace falta mostrar todos los casos posibles. Lo importante es *entender cómo y por qué funciona* la multiplicación de las diversas unidades del sistema de numeración decimal, y saber aplicar este conocimiento. Así, volviendo al ejemplo anterior, **400 x 30** = 4 centenas x 3 decenas = (4 x 3) x 100 decenas = 12 unidades de mil = **12.000**. Análogamente, **20 x 30** = 2 decenas x 3 decenas = (2 x 3) x 10 decenas = 6 centenas = **600**. Y así en los demás casos.

Una vez captado el funcionamiento de la multiplicación de las diversas unidades –y la razón de este funcionamiento– podemos "descubrir" la regla habitual para estos casos: "*El producto de dos factores que son múltiplos de 10 (es decir, que acaban en uno o varios ceros) es otro múltiplo de 10 que tiene a la derecha tantos ceros como la suma de los ceros que presentan a la derecha ambos factores*". Así, **200 x 400** = (8 con 4 ceros) = **80.000**; **300 x 50** = (15 con 3 ceros) = **15.000**; **20 x 370.000** = (74 con 5 ceros) = 7.400.000; etc.

A partir de aquí podemos plantear la multiplicación de dos factores enteros, gradualmente, hasta llegar al formato que se utiliza habitualmente:

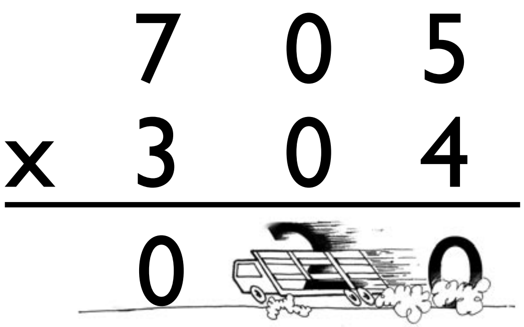
```
    427        427       427
 x   38     x   38    x   38
     56 →    3416 →    3416 → unidades
    160     12810      1281  → decenas
   3200     16226     16226
    210
    600
  12000
  16226
```

Obsérvese que el primer formato presenta progresivamente todos los productos parciales desglosados (8 x 7, 8 x 20, 8 x 400, 30 x 7, 30 x 20, 30 x 400). El segundo formato se reduce a dos productos parciales (8 x 427 y 30 x 427) expresados ambos en unidades, razón por la que aparece el sumando 12.810. El tercer formato –que es el habitual– respeta las unidades en que se expresa cada sumando: 3.416 unidades y 1.281 decenas (resultado de 3 decenas x 427 unidades). Esto explica el progresivo desplazamiento de los sumandos hacia la izquierda y la desaparición de los ceros finales. Veamos los siguientes ejemplos:

```
   1654                      705
 x  359                    x 304
  14886 → unidades          2820 → unidades
  8270  → decenas          2115  → centenas
 4962   → centenas       214320
 593786
```

Si volvemos a los tres formatos de la multiplicación 427 x 38 podemos observar que el primero evita el problema de la *llevada*, situación que no se presenta en los dos últimos. ¿Cómo enfrentar este problema tan frecuente en ejercicios de multiplicación, ya que la mayor parte de los productos que aparecen en las tablas de multiplicar tienen dos dígitos y, por consiguiente, obligan a "llevar"?

La cuestión básica consiste en entender lo que ocurre: aquí vuelve a entrar en juego el propio ser del sistema decimal, ya que su esencia consiste precisamente en que al llegar a tener 10 unidades de un orden, estas se convierten en 1 unidad del orden inmediatamente superior. Los errores de los niños –y de algunos adultos– con la llevada al multiplicar, suelen ser producto de un aprendizaje mecánico,



privado de significado, y denotan que no se comprende el funcionamiento del sistema decimal.

Lo peor del caso –como en la suma– es que habitualmente se intenta corregirlos sobre el propio formato escrito en que se propone la multiplicación, sin percatarse de que los errores cometidos al utilizar los formatos numéricos –que son abstractos–, sólo pueden corregirse retornando al terreno de lo concreto, que es donde se puede alcanzar el significado de la operación.

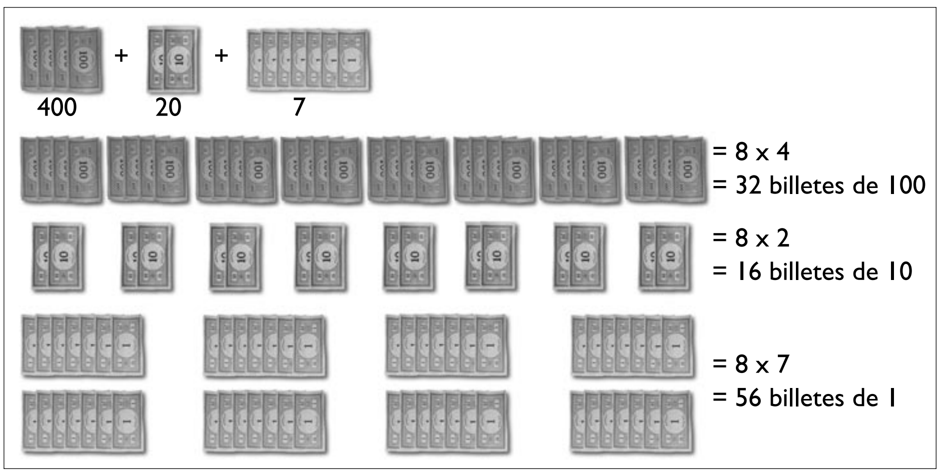
¿Cuál puede ser este terreno concreto en el que se respete la esencia del sistema decimal? Puede ser, nuevamente, el de los billetes de denominación decimal (1, 10, 100, 1.000, etc.). Tomemos, por ejemplo, la multiplicación **8 x 427**, que podemos interpretar como "**8 veces 427**" (8 sería el multiplicador y 427 el multiplicando).

Si entendemos que 427 está compuesto por **4 centenas** (4 billetes de 100), **2 decenas** (2 billetes de 10) y **7 unidades** (7 billetes de 1), "8 veces 427" significará:

8 montones de 4 billetes de 100, es decir,
8 x 4 = 32 billetes de 100
8 montones de 2 billetes de 10, es decir,
8 x 2 = 16 billetes de 10
8 montones de 7 billetes de 1, es decir,
8 x 7 = 56 billetes de 1

El conocido proceso de "ir al banco" para cambiar billetes produce los siguientes resultados graduales: 50 billetes de 1 se convierten en 5 de 10; nos quedan 6 billetes de 1 y tenemos 5 billetes más de 10, con lo que el número de éstos llega a 21. Llevados 20 de estos billetes al banco, se convierten en 2 de 100; nos queda 1 de 10 y tenemos 2 billetes más de 100, con lo que el número de éstos llega a 34. Finalmente, estos últimos se convierten en 3 billetes de 1.000, al cambio de 30 de 100, y 4 sobrantes de 100. Al final del proceso de cambios tenemos: 3 billetes de 1.000, 4 de 100, 1 de 10 y 6 de 1. La composición de estas partes nos lleva al producto, **3.416**.

De aquí se puede pasar ahora al formato escrito, en el que se pueden indicar las unidades que "se llevan" sobre los correspondientes dígitos del multiplicando; escritura que irá desapareciendo poco a poco, a medida que el aprendiz esté en capacidad de retener mental y momentáneamente cada "llevada" para agregarla al producto correspondiente.



Este recurso a lo concreto –billetes– debe acompañar al ejercicio de la multiplicación, sobre todo cuando el multiplicador consta de un solo dígito. Y debe quedar ahí, disponible, para dotar de significado a dicho ejercicio cada vez que el aprendiz experimente dificultades o cometa errores en su realización.

Multiplicación
con uno o dos factores decimales

Supongamos ahora que se trata de multiplicar **42,7 x 0,38**. Ya sabemos que esto significa multiplicar (**40 + 2 + 0,7**) x (**0,3 + 0,08**) y que por consiguiente, mediante una extensión de la propiedad distributiva, tendríamos que vernos con la multiplicación de decenas por décimas (**40 x 0,3**) y por centésimas (**40 x 0,08**), de unidades por décimas (**2 x 0,3**) y por centésimas (**2 x 0,08**), y de décimas por décimas (**0,7 x 0,3**) y por centésimas (**0,7 x 0,08**).

Para clarificar esta complejidad tenemos que trabajar ahora con la multiplicación de las diversas unidades –enteras y decimales– del sistema de numeración decimal. Así, por ejemplo, ¿qué significa **0,1 x 100**? Puede entenderse como "la décima parte de 100" ó "100 décimas". Y ya sabemos que ambas expresiones equivalen a 1 decena. Análogamente, **0,01 x 0,1** puede entenderse como "la centésima parte de una décima", o "la décima parte de una centésima", expresiones ambas que equivalen a 1 milésima. Siguiendo esta forma de razonar podemos elaborar una tabla como la siguiente:

Multiplicación	Interpretación	Resultado	Producto
0,1 × 10	décima parte de 1 decena ó 10 décimas	1 unidad	0,1 × 10 = 1
1.000 × 0,1	décima parte de 1 unidad de mil ó 1.000 décimas	1 centena	1.000 × 0,1 = 100
100 × 0,01	centésima parte de 1 centena ó 100 centésimas	1 unidad	100 × 0,01 = 1
0,001 × 100	milésima parte de 1 centena ó 100 milésimas	1 décima	0,001 × 100 = 0,1
0,1 × 0,1	décima parte de 1 décima	1 centésima	0,1 × 0,1 = 0,01
0,01 × 0,01	centésima parte de una centésima	1 diezmilésima	0,01 × 0,01 = 0,0001

Esta tabla puede prolongarse también todo lo que se desee, pero no hace falta mostrar todos los casos posibles. Lo importante –al igual que antes– es *entender cómo y por qué funciona* la multiplicación de las diversas unidades del sistema de numeración decimal, y saber aplicar este conocimiento. Así, volviendo al ejemplo anterior, **40 x 0,3** = 4 decenas x 3 décimas = (4 x 3) decenas de décimas ó (4 x 3) x 10 décimas = **12 unidades**. También, **0,7 x 0,3** = 7 décimas x 3 décimas = (7 x 3) décimas partes de una décima ó (7 x 3) x 0,1 x 0,1 = **21 centésimas** = **0,21**. Análogamente, **0,7 x 0,08** = 7 décimas x 8 centésimas = (7 x 8) décimas partes de una centésima ó (7 x 8) x 0,1 x 0,01 = **56 milésimas** = **0,056**.

De una forma similar a la que proponíamos antes, podemos "descubrir" ahora la regla habitual para estos casos: "*El producto de dos números decimales es otro número decimal que tiene tantas cifras decimales como el total de cifras decimales que poseen entre ambos factores*". Así,

4 x 0,03 = (4 × 3 con 2 decimales) = (12 con 2 decimales) = **0,12**

0,5 x 0,04 = (5 × 4 con 3 decimales) = (20 con 3 decimales) = 0,020 = **0,02**

0,9 x 0,005 = (9 × 5 con 4 cifras decimales) = (45 con 4 cifras decimales) = **0,0045**

0,007 x 80 = (7 × 80 con 3 decimales) = (560 con 3 decimales) = 0,560 = **0,56**

0,02 x 60 = (2 × 60 con 2 decimales) = (120 con 2 decimales) = 1,20 = **1,2**

2.000 x 0,0005 = (2.000 × 5 con 4 decimales) = (10.000 con 4 decimales) = 1,0000 = **1**

A partir de aquí podemos efectuar la multiplicación de dos factores –de los que al menos uno de ellos posee decimales– de la misma forma que la de dos factores enteros, cuidando de separar correctamente al final las cifras decimales: **42,7 x 0,38** = **(427 x 38) x 0,1 x 0,01 = 16.226 x 0,001 = 16,226**. Y del mismo modo, utilizando dos ejemplos anteriores: **16,54 x 3,59 = 59,3786; 7,05 x 0,304 = 2,14320 = 2,1432**.

De todas formas, conviene ejercitarse en el uso de las diversas unidades del sistema de numeración decimal como factores. Con el fin de desarrollar esta destreza, se propone escribir el elemento ausente de cada fila de la siguiente tabla:

Factor 1	Factor 2	Producto
157	?	1,57
?	143,28	14,328
0,000175	?	0,0175
4,37	0,00001	?
183	?	18.300
?	1.000	92,03
100	0,076	?
?	0,1	101
0,001	?	1,69
0, 0345	10	?
100	?	2,38

5. Estimar el producto de una multiplicación

Ya sabemos que esto significa *dar el resultado aproximado de la multiplicación*. Decisión que se justifica porque a veces no es necesario el valor exacto de la operación, sino que resulta suficiente una aproximación adecuada a nuestros intereses o a la naturaleza del problema.

Los dos salones de primer grado de la escuela tienen **41** y **37** alumnos, respectivamente. Todas las semanas se le facilita a cada alumno una página fotocopiada con ejercicios de matemática. Como el curso se desarrolla en **29** semanas lectivas, se desea saber si alcanzará para todo el año con **5** resmas de papel de fotocopia.

Una salida sería la de obtener el total de alumnos (**41 + 37 = 78**) y comparar con **2.500 (5 x 500)** el producto de **78 x 29**. Esa práctica es necesaria si, por ejemplo, quiero saber con exactitud el número de hojas faltantes o sobrantes. Pero para responder a la pregunta formulada, puedo pensar de otra manera.

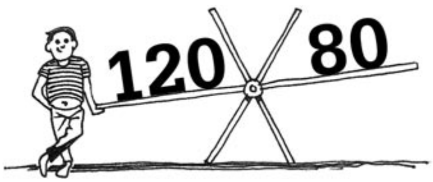
En primer lugar, redondeo por encima el número de alumnos y de semanas y los llevo a **80** y a **30**, respectivamente. Ahora efectúo la multiplicación de estos dos factores, **80 x 30 = 2.400**. Conclusión: Sí nos alcanza con las 5 resmas.

Veamos qué competencias se ponen de manifiesto al estimar el valor de una multiplicación. En primer lugar, se produce un análisis inicial de la situación, análisis que lleva a la conclusión de la pertinencia del uso de la estimación. Ya dentro del proceso, se "leen" las cantidades y se toma en cuenta su valor global, lo que permite redondearlas sin mayor riesgo. A partir de este redondeo se facilita la aplicación del cálculo mental. Como se puede apreciar, todo es ganancia a la hora de estimar.

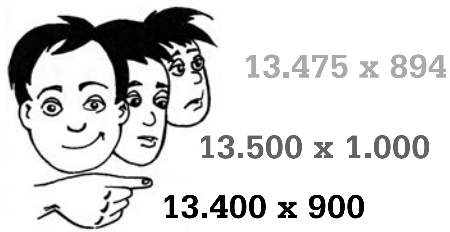
Con el fin de facilitarnos las tareas de estimación en el caso de la multiplicación, presentamos algunas estrategias recomendadas por la experiencia de los buenos estimadores:

1. *Redondear el valor de los factores*, bien sea por exceso o por defecto, según lo recomiende la situación.

2. *Compensar entre sí los valores de los factores*. Estrategia que suele complementar a la anterior. Obsérvese la siguiente multiplicación: **123 x 78**. La sugerencia aquí es la del redondeo y compensación: llevar la multiplicación a **120 x 80 = 9.600** (de hecho, **123 x 78 = 9.594**). Análogamente, la multiplicación **0,096 x 3,12** puede estimarse por **0,1 x 3 = 0,3** (de hecho, **0,096 x 3,12 = 0,29952**).



3. *Afinar el proceso de estimación*. Con el fin de mejorar las destrezas de estimación, es conveniente plantearse diversas alternativas y luego comparar el resultado de cada una de ellas con el producto exacto. Así, por ejemplo, si se trata de la multiplicación **13.475 x 894**, podemos plantear la aproximación **13.000 x 1.000**, cuyo producto es **13.000.000**. También podríamos proponer **13.500 x 900**, cuyo producto es **12.150.000**. O bien, **13.400 x 900 = 12.060.000**. La primera estimación es la más sencilla de calcular, pero probablemente la menos aproximada. En cambio la tercera –que procede por redondeo y compensación entre los factores– parece ser la más cercana. De hecho, **13.475 x 894 = 12.046.650**.



Debe quedar claro que lo que se busca con la estimación es tener una idea inicial aproximada del valor del producto de los factores, por la vía del redondeo y del uso de las destrezas del cálculo mental. Es decir, obtener desde el comienzo un valor razonable para el producto, antes de –y a veces, en lugar de– proceder a su cálculo por el algoritmo escrito.

Estime mentalmente el valor de las siguientes multiplicaciones. Hágalo de todas las formas que se le ocurran y evalúe la aproximación de cada resultado. Deduzca qué tipo de redondeo y compensación resulta más preciso en cada caso y por qué.

18 x 22	92 x 28,76
105 x 85	78,36 x 0,19
0,039 x 1.020	7,24 x 0,9
4.837 x 115	138 x 55
0,089 x 1,035	61,8 x 0,93
3.874 x 0,094	19 x 0,047

Invente una serie de ejercicios similares a los anteriores y resuélvalos.

6. Tengo ante mí una situación de multiplicación; y ahora, ¿qué hago?

1. *Observo la situación* y decido si necesito un resultado exacto o me basta con una aproximación. En el segundo caso procedo por la vía de la estimación… y listo.

2. Si necesito un resultado exacto, *leo los factores* y *estimo el valor de su producto*, para tener desde el comienzo una idea razonable y aproximada del resultado.

3. *Decido la vía* que voy a utilizar para *realizar* la multiplicación: el cálculo mental o el algoritmo escrito habitual.

4. *Efectúo* la multiplicación por esa vía y llego al producto.

5. *Reviso el resultado* obtenido. Para validar la exactitud del producto, puedo seguir una vía distinta a la utilizada, o servirme de la calculadora. Además, aprovecho para *revisar la estimación inicial* y buscar la forma de afinarla.

Este proceso puede seguirse tanto si se trata de un ejercicio directo de multiplicación o de estimación –con lo cual el paso 1 queda decidido–, como si se trata de una situación problema que implique la multiplicación como modelo adecuado.

Lo que sí conviene destacar es que, escritos los factores, horizontal o verticalmente, *este "espacio" del ejercicio escrito no es necesariamente el espacio en el que se realiza efectivamente la multiplicación.* La operación puede realizarse con toda libertad por cualquiera de las vías propuestas, y algunas de ellas no necesitan recursos para escribir, sino una mente activa. *El "espacio" del ejercicio escrito es simplemente el espacio en el que se leen los factores y en el que luego se escribe el producto.*

7. La resolución de problemas de multiplicación

Los "problemas de multiplicar" pueden adoptar la forma de situaciones de la vida diaria en las que la multiplicación aflora sin dificultad como la operación matemática que sirve de modelo oportuno. Otras veces, pueden presentar un carácter lúdico, o referirse a regularidades o características que presentan algunos números y series de números. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) *El producto de cinco números naturales consecutivos es **2.520**. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de estos números?*

b) Después de la graduación, todos los estudiantes intercambiaron fotos entre sí de tal forma que cada estudiante se quedó con una foto de cada uno de sus compañeros. Si en total se intercambiaron 870 fotos, ¿cuántos estudiantes se graduaron?

c) *La edad de Juan es **el doble** de la que Pedro tenía cuando Juan tenía la edad que Pedro tiene ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de ellos si la suma de sus edades es **49**?*

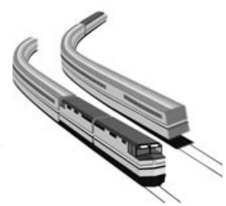
d) Hay **dos** números tales que **el triple** del mayor es igual a **cuatro veces** el menor. Si la diferencia de ambos números es **8**, ¿cuál es el mayor?

e) *Nieves y Julia ganaron **la misma cantidad** por su trabajo, pero Nieves trabajó **dos días más** que Julia. Además, Julia ganó **20.000** pesos diarios y Nieves, **15.000**. ¿Cuántos días trabajó cada una de ellas?*

f) Complete las casillas del siguiente cuadro:

	x		–		= 5
x	■	x	■	–	■
	+	3	–		= 4
–	■	x	■	+	■
	x		x		= 6
= 7	■	=6	■	= 8	■

g) *La multiplicación **267 x 3 = 2.321** está errada. Pero a partir de ella es posible llegar a una multiplicación correcta sabiendo que los tres números de esta última se obtienen de la primera haciendo cada dígito una unidad mayor o menor que el dígito correspondiente de la multiplicación dada (por ejemplo, donde aparece un **7** puede estar un **6** ó un **8**, etc.). ¿Cuáles son los números de la multiplicación correcta?*



h) Dos trenes salen al mismo tiempo de dos ciudades diferentes, en sentidos opuestos. Uno se mueve a 95 km/h y el otro a 120 km/h (velocidades promedio). Si se cruzan a las 3 horas de haber salido, ¿cuál es la distancia entre ambas ciudades?

i) *Al multiplicar todos los enteros del **1** al **30**, ¿en cuántos ceros termina el producto?*

j) Hallar el siguiente término de la sucesión: **9**, **18**, **15**, **30**, **27**, **54**, **51**, **102**, ___

k) *En el mercado mayorista se vende el azúcar en empaques de **9**, **6** y **2** kg, y la harina, en empaques de **15**, **8** y **7** kg. El precio del azúcar es **el doble** del de la harina. La señora Sandra compra **cinco** de los seis empaques disponibles y paga igual por la harina que por el azúcar. ¿Qué empaque de cuál de los dos productos no ha comprado?*

l) En el salón de clase de Ruth hay **4** filas de pupitres y en cada fila hay **7** pupitres. ¿Cuántos años tiene la maestra de Ruth?

m) *Si **A** = 191 x (1 + 2 + 3 + … + 192) y **B** = 192 x (1 + 2 + 3 + … + 191), ¿cuál de los dos productos, A o B, es mayor?*

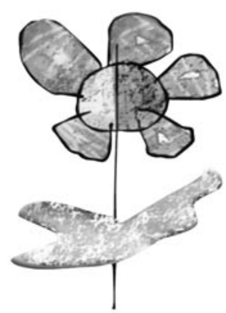
n) Si **A**, **B**, **C**, **D**, **E** representan 5 dígitos diferentes entre sí y distintos de cero, hallar su valor para que se verifique:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ \times \qquad 4 \\ \hline E\,D\,C\,B\,A \end{array}$$

o) *Un vendedor mayorista visita tres establecimientos. Con las ventas en el primero, **duplica** el dinero que trae y, después, gasta **30.000** pesos. En el segundo, **triplica** el dinero que traía al entrar y gasta **54.000** pesos. Y en el tercero, **cuadruplica** el dinero que traía al entrar y gasta **72.000** pesos. Entonces comprueba que le quedan **48.000** pesos. ¿Cuánto dinero tenía antes de entrar al primer establecimiento?*

p) Los signos * esconden diversos dígitos en la siguiente multiplicación. Descúbralos:

$$\begin{array}{ccc} & * & * \\ & 2 & * \\ \hline * & * & 7 \\ * & 6 & \\ \hline 9 & * & 7 \end{array}$$



Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Si se trata de cinco números consecutivos, la diferencia entre el mayor y el menor es, sencillamente, **4**: no hace falta obtener tales números. Pero si nos pica la curiosidad, podemos proceder por ensayo y ajuste. Así, si ensayamos con **5**, **6**, **7**, **8** y **9**, su producto es **15.120**, muy por encima del propuesto. Debemos "rebajar" los factores. Y por esta vía llegamos a **3**, **4**, **5**, **6** y **7**, cuyo producto es **2.520**. La diferencia **7 – 3** es igual a **4**.

b) La situación nos dice que cada estudiante debe repartir tantas fotos suyas como estudiantes hay, menos **1** (ya que no se da una foto a sí mismo). Y este reparto lo debe hacer cada uno de ellos. Por consiguiente, **870** es el producto de dos números seguidos: el número de los que reparten, por el número de fotos repartidas por cada uno. La vía del ensayo y ajuste nos lleva a precisar que los números son **30** y **29** (nos ha podido ayudar el hecho de que **30 x 30 = 900**…). Se graduaron **30** estudiantes.

c) Sin enredarnos con el enunciado, percibimos que Juan es mayor que Pedro. Hay cuatro edades –**cuatro** números enteros– en danza: **dos** de Juan (antes y ahora) y **dos** de Pedro (también antes y ahora). La edad actual de Juan es **el doble** de la edad de Pedro antes, de donde se sigue que la de Juan es un número **par**. Las dos edades actuales suman **49**; por consiguiente, la edad actual de Pedro es un número **impar**. Finalmente, la edad de Juan antes es igual a la de Pedro ahora.

Podemos suponer que Juan tiene ahora **30** años: Pedro tiene **19** (**49 – 30**) y antes tenía **15** (**30 : 2**). Pero en ese "antes" (hace **4** años) Juan tenía **26** (**30 – 4**) y debería haber tenido **19**, según el enunciado. Por consiguiente, no hemos dado con la respuesta. Parece ser que la diferencia entre las dos edades actuales es grande, por lo que procedemos a disminuirla.

Supongamos entonces que la edad actual de Juan es **28** años: Pedro tiene **21** (**49 – 28**) y antes tenía **14** (**28 : 2**). Ese "antes" ocurrió hace **7** años (**21 – 14**) y en ese momento la edad de Juan era **21** años (**28 – 7**). Esta sí es la respuesta: Juan tiene **28** años y Pedro, **21**.

d) Veamos una vía de resolver el problema. Si el número mayor (*M*) es **8** unidades mayor que el número menor (*m*), el **triple** de *M* equivaldrá al **triple de *m* más 24**. Pero el hecho de que también sea igual al **cuádruplo** de *m* –el cuádruplo de un número equivale al **triple** del número más el propio número– nos hace ver que *m* es **24**. Gráficamente, el triple de *M*:

m + 8	*m* + 8	*m* + 8

equivale a:

m	*m*	*m*	8+8+8

que, a su vez, según el enunciado, equivale al cuádruplo de m:

m	*m*	*m*	*m*

Y, por correspondencia entre ambos gráficos, ***m* = 24**. De donde, ***M* = 24 + 8 = 32**.

Otra vía puede ser la del ensayo y ajuste. Inicialmente, se puede pensar que los números andan cerca de **40** (*M*) y **30** (*m*), ya que el triple de 40 coincide con el cuádruplo de 30. Como la diferencia entre ambos es **8**, podemos suponer ***M* = 40 y *m* = 32**. El triple de 40 es 120 y el cuádruplo de 32 es 128: no se da la igualdad. Si suponemos ***M* = 41** y ***m* = 33**, los valores respectivos son **123** y **132**. La diferencia –que antes era 8 (128 – 120) – ahora es **9** (**132 – 123**), por lo que se deduce que los números *M* y *m* deben ser menores. Además, al pasar *M* de 40 a 41 –una unidad– las diferencias lo hicieron de 8 a 9 –también una unidad–, de donde se desprende que hay que "bajar" 8 unidades a *M* desde 40: ***M* = 32 y *m* = 24**.

e) La diferencia entre los dos salarios diarios es de **5.000** pesos (**20.000 – 15.000**). Para cubrir la diferencia acumulada en los días que trabajó Julia, Nieves ha tenido que trabajar dos días más, en los que ha ganado **30.000** pesos (**15.000 x 2**). De donde se desprende que Julia trabajó **6** días (**30.000 : 5.000**) y Nieves, **8**. Efectivamente, ambas llegan a ganar **120.000** pesos (**6 x 20.000** y **8 x 15.000**).

f) La vía de solución es la del ensayo y ajuste. Puede servirnos de guía inicial la 2ª columna numérica, pues la presencia del factor **3** y del producto **6** nos deja los factores **1** y **2** como posibilidades para la 1ª y 3ª casillas de esa misma columna. Las vías de ensayo pueden ser diversas y deben llevar al siguiente resultado:

4	x	2	–	3	= 5
x	■	x	■	–	■
2	+	3	–	1	= 4
–	■	x	■	+	■
1	x	1	x	6	= 6
= 7	■	=6	■	= 8	■

g) El punto inicial para la resolución de este problema puede ser la observación de las cifras de las unidades de los tres números:

7, **3** y **1**. Como los valores verdaderos son una unidad mayor o menor, las ocho alternativas correspondientes para las cifras de las unidades son:

multiplicando	multiplicador	producto
8	2	0
8	2	2
8	4	0
8	4	2
6	2	0
6	2	2
6	4	0
6	4	2

Como se ve, sólo hay dos ternas favorables para las cifras de las unidades: **8**, **4**, **2** (**8 x 4 = 32**) y **6**, **2**, **2** (**6 x 2 = 12**). Esta segunda coloca el **2** como multiplicador, situación que no es aceptable, ya que el multiplicando tiene tres cifras y la de las centenas podría ser a lo sumo **3**, por lo que la multiplicación por 2 nunca podría darnos un producto de **4** cifras.

De modo que la cifra de las unidades del multiplicando es **8**, la del producto es **2**, y el multiplicador es **4**. Este último dato nos lleva a precisar que la cifra de las centenas del multiplicando es **3** (no puede ser 1, la otra alternativa posible, pues en este caso el producto sólo tendría 3 cifras y no 4). Y finalmente, que la de las decenas es **5** (y no **7**, la otra alternativa posible). La multiplicación "correcta" es: **358 x 4 = 1432**.

h) La distancia entre ambas ciudades será la suma de las distancias recorridas por ambos trenes hasta el momento de cruzarse. El primer tren recorre **95 km/h x 3 h = 285 km**. Y el segundo, **120 km/h x 3 h = 360 km**. La distancia entre ambas ciudades es, pues, **285 km + 360 km = 645 km**.

Otra forma de plantear la solución es averiguar la distancia "construida" en cada hora de aproximación de los dos trenes y multiplicar esa distancia por las tres horas de recorrido hasta cruzarse. Así, **distancia = (95 km + 120 km) x 3 = 215 km x 3 = 645 km**.

i) Aquí la observación fundamental se refiere a la forma de "producir" un cero a la derecha de un producto de dos factores. Veámoslo en la siguiente tabla:

Situaciones	Factores posibles	Nº ceros a la derecha
Un factor acaba en 0	10, 20, 30	3
Un factor acaba en 5 (no en 25) y el otro es par	5 y 2, 15 y 6	2
Un factor acaba en 25 y el otro es múltiplo de 4	25 y 4	2

Como se ve, el producto de los 30 primeros enteros positivos acaba en **7** ceros.

j) El patrón de formación es: "el doble del anterior / el número anterior menos 3". Así que el último término es **99**.

k) Si la señora Sandra comprara los tres envases de azúcar –de **9**, **6** y **2** kg– pagaría el equivalente a **18**, **12** y **4** kg de harina, respectivamente. En total, el equivalente a **34** kg de harina. Pero si se lleva los tres envases de este último producto –de **15**, **8** y **7** kg– pagaría por un total de **30** kg de harina. Para que el costo de ambos productos sea igual, debemos eliminar el envase de **2** kg de azúcar –que cuesta como **4** de harina–. De esta forma estaría pagando en ambos productos el equivalente a **30** kg de harina.

l) Pues..., no podemos saberlo porque no poseemos datos al respecto. Desde luego, no tiene por qué ser 28 años (4 x 7), ni 11 (4 + 7), ni 47...

m) Podemos calcular el valor de cada una de las sumas entre paréntesis. Así, para sumar **1 + 2 + 3 + … + 190 + 191 + 192** podemos pensar de esta manera: formemos todas las parejas "equidistantes" posibles, es decir, **1 + 192, 2 + 191, 3 + 190, …** , hasta las del medio: **94 + 99, 95 + 98, y 96 + 97**. En cada una de estas 96 parejas, el resultado de la suma es **193**. Así que: **1 + 2 + … + 190 + 192 = 96 x 193 = 18.528.** A partir de aquí, **1 + 2 + 3 + … + 190 + 191 = 18.528 – 192 = 18.336.** De esta forma tenemos:

A = 191 x (1 + 2 + … + 191 + 192) = 191 x 18.528 = 3.538.848

B = 192 x (1 + 2 + … + 190 + 191) = 192 x 18.336 = 3.520.512

De modo que **A** es mayor que **B**.

n) Este es un ejercicio en el que hay que manejar con soltura la tabla de multiplicar del **4**. Observando el enunciado:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ \times \qquad 4 \\ \hline E\,D\,C\,B\,A \end{array}$$

percibimos que **A** –por ser la 1ª cifra del multiplicando, de izquierda a derecha– debe ser **menor** que **3** para que no haya **6** cifras en el producto. Pero **A** no puede ser **1** ya que –al nivel de las unidades– **4 x E** debe ser par. Por consiguiente **A = 2**. Esto deja para **E** –como 1ª cifra del producto y 5ª cifra del multiplicando– el dígito **8** como único valor posible. Hasta ahora tenemos:

$$\begin{array}{r} 2\,B\,C\,D\,8 \\ \times \qquad 4 \\ \hline 8\,D\,C\,B\,2 \end{array}$$

Como la multiplicación **4 x B** no origina "llevada", **B** debe ser igual a **1**. Pero si **B = 1** como 4ª cifra del producto, **D** debe tomar el valor de **2** ó de **7**, para que con las **3** unidades de llevada de **4 x 8** presente un **1** en la 4ª cifra del producto. Ahora bien, como **D** no puede ser **2**, **D = 7**. Finalmente, **C** toma el valor de **9**. La multiplicación descubierta es:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,9\,7\,8 \\ \times \qquad 4 \\ \hline 8\,7\,9\,1\,2 \end{array}$$

o) Podemos representar en la siguiente tabla la información aportada por el enunciado:

Nº tienda	Trae	Consigue	Gasta	Le queda
1		Duplica	30.000	
2		Triplica	54.000	
3		Cuadruplica	72.000	48.000

Ahora buscamos su construcción total procediendo desde el último dato (lo que le queda al salir de la 3ª tienda) hacia arriba. Describimos el proceso de la 3ª fila de datos: Si sumamos lo que le queda con lo que gasta (**48.000 + 72.000**), tenemos **120.000** pesos. Esta cantidad representa el cuádruplo de lo que traía, **30.000** pesos (**120.000 : 4**), que era lo que le quedaba al salir de la 2ª tienda. Ahora se repite el proceso en la 2ª fila, y luego en la 1ª. El resultado final es:

Nº tienda	Trae	Consigue	Gasta	Le queda
1	29.000	Duplica	30.000	28.000
2	28.000	Triplica	54.000	30.000
3	30.000	Cuadruplica	72.000	48.000

p) Como puede observarse, la cifra de las unidades del multiplicando podría ser **3** u **8**, para que la multiplicación por el 2 de las decenas termine en **6**. Pero no puede ser **8**, porque el producto termina en **7** (impar). Por lo tanto, el multiplicando termina en **3**. Ahora bien, el multiplicador debe terminar a su vez en **9**, única posibilidad para que el producto acabe en **7**. El resultado hasta ahora es:

$$\begin{array}{r} * \; 3 \\ 2 \; 9 \\ \hline * \; * \; 7 \\ * \; 6 \;\; \\ \hline 9 \; * \; 7 \end{array}$$

Ahora es cuestión de proceder por ensayo y ajuste con la cifra desconocida del multiplicando, sabiendo que debe ser **< 4**, en razón del número de cifras del producto y de la "llevada" que aporta su multiplicación por 9. Finalmente se llega a:

$$\begin{array}{r} 3\;3 \\ 2\;9 \\ \hline 2\;9\;7 \\ 6\;6\;\; \\ \hline 9\;5\;7 \end{array}$$

¿Puede usted elaborar unos ejercicios similares a éste?

No podemos terminar esta parte dedicada a los problemas de multiplicación sin reiterar la reflexión que, sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto, hicimos en los dos Cuadernos anteriores. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos todos:

1. El método que aparece como más utilizado y eficiente sigue siendo el del *tanteo razonado*. Como decíamos, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación– y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad.

2. La valoración del método de tanteo razonado no debe excluir la consideración y práctica de *otros métodos* a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, algunos de los problemas que acaban de trabajarse podían haberse planteado y resuelto por la vía algebraica, es decir, utilizando incógnitas y ecuaciones, aunque en algunos casos – como en el problema **o)**– resulte más engorroso (puede hacer la prueba…).

3. Volviendo a las formas en que hemos trabajado los problemas anteriores, nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables o a los datos numéricos, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo…

4. Otro punto a destacar es la presencia de ciertas *herramientas* auxiliares que facilitan la consideración de los datos del problema o de los que se van obteniendo durante su resolución: nos referimos al uso de *tablas*, *gráficas*, etc. Por otro lado, resulta muy destacable la observación de los resultados presentes en las *tablas de multiplicar*, observación que suele obviarse cuando se aprenden y manejan simplemente para obtener un producto.

8. La multiplicación en el aula

El esquema que hemos seguido hasta aquí en la presentación matemática del tema de la multiplicación nos sugiere la "ruta" de contenidos que –en el orden que se propone, pero gradualmente– podría seguirse en el aula (OJO: ésta no es una prescripción didáctica relativa al cómo desarrollar la enseñanza, sino tan sólo la ruta ordenada de los contenidos que pueden tratarse en el aula, con el fin de adquirir las competencias propias del tema):

• Ejercitación en dobles y mitades de números a partir de la suma.

• Ejercicios de sumas reiteradas. Construcción de las tablas de multiplicar. Descubrimiento del significado de cada tabla.

• Inicio de la ejercitación en el cálculo mental, de la memorización de las tablas y de la resolución de problemas multiplicativos. Esta triple actividad debe mantenerse permanentemente.

• Multiplicación con materiales concretos y paso a la multiplicación en formato escrito (multiplicador de un solo dígito). Resolución progresiva del problema de la "llevada".

• Comprensión de los productos de las diversas unidades del sistema de numeración decimal. Ejercitación al respecto.

• Multiplicación con factores enteros de más de un dígito. Multiplicación de cantidades decimales. Se sugiere proceder en la forma propuesta en el punto 6: lectura de los factores, estimación del producto, decisión de la vía a seguir, obtención y revisión del producto, afinación de la estimación inicial.

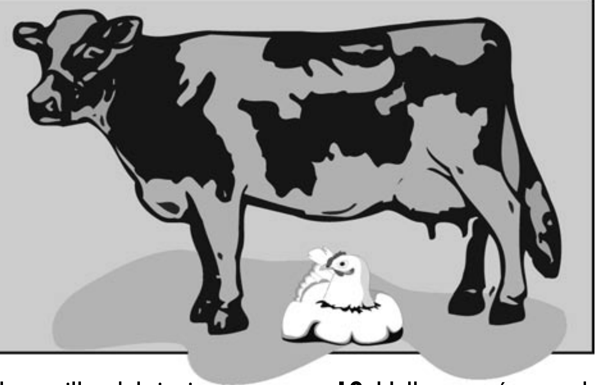
En general, no debe insistirse en la resolución de multiplicaciones en su formato escrito, y mucho menos si se trata de factores de muchas cifras enteras o decimales. Para este tipo de multiplicaciones contamos con la calculadora, que es el recurso que utilizamos en la vida diaria para estos casos. No es preciso "torturar" a los niños con esos ejercicios escritos. Lo que sí debe hacerse con ellos es estimar el producto, así como precisar el número de cifras enteras y decimales que tendrá. Recuérdese que la calculadora puede sustituir al ejercicio escrito en la obtención del producto, pero nunca al cálculo mental y a la estimación en el desarrollo de las destrezas que estas dos alternativas pueden generar en los alumnos.

9. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

12. *Estoy mirando el reloj y veo que la aguja horaria y el minutero no coinciden. Sin embargo observo que la aguja horaria va a tardar el doble que el minutero en llegar al 6. ¿Qué hora es en este momento?*

13. Si me das una naranja, tendré el doble de las tuyas. Pero si te doy una de las mías, tendremos el mismo número de naranjas. ¿Cuántas tengo yo?

14. *En un conjunto de vacas y de pollos el número de patas es **14** unidades mayor que el de cabezas, que es **6**. ¿Cuántas vacas hay?*



15. Complete las casillas del siguiente cuadro:

6	+		–		= 7
–	■	–	■	–	■
	–		x		= 2
x	■	–	■	–	■
	–		–		= 7
= 9	■	= 0	■	= 1	■

16. *Si una niña llega a la adolescencia a los **11** años, ¿con cuántos años llegarán **5** niñas?*

17. Una señora tiene **33** años y su hijo, **7**. ¿Dentro de cuántos años será la edad de la mamá **tres veces** la de su hijo?

18. *Hallar el término que falta en la serie: **3, 9, __, 45, 93, 189***

19. Hallar un número de cuatro dígitos menores que **5** tales que, considerados de izquierda a derecha, el 4° es **el doble** del 1°, el 2° es **3 unidades menor** que el 3°, y **la suma** del 1° y del 4° es **el doble** del 3°.

20. *En un año un carnicero vende **145** kg de carne a un panadero a un costo de **4.300** pesos/kg. En el mismo período, el panadero le vende al carnicero **406** kg de pan a un precio de **1.500** pesos/kg. ¿Quién de los dos es deudor del otro?*

21. Entre billetes de **1.000** y de **2.000** pesos, Carlos tiene **10** billetes. Le faltan **4.000** pesos para comprar un pantalón. Si el número de billetes de 1.000 fuera el de 2.000 y viceversa, tendría el dinero exacto para la compra. ¿Cuánto dinero tiene?

22. *Coloque las cifras **2, 4, 7** y **9** –una en cada cuadrito– de tal forma que el producto: □□ x □□ sea el mayor posible.*

23. En la cooperativa necesitan un tractor para trabajar en la granja. Les han ofrecido dos alternativas: ***A)*** **300.000** pesos por el alquiler + **5.000** pesos por cada hora de trabajo; ***B)*** **250.000** pesos por el alquiler + **6.000** pesos por cada hora de trabajo. Si el tiempo de trabajo se estima en algo más de **50** horas, ¿qué opción resulta más barata?

24. *Los signos * esconden diversos dígitos en la siguiente multiplicación. Descúbralos:*

```
     * * 7
     3 * *
   -------
   * 0 * *
   * * *
 * 5 *
 ---------
 * 7 * * 3
```

25. Un distribuidor de carros de juguete debe repartir su mercancía en **7** jugueterías. En la primera, deja **la mitad** de los carros que trae, **más 1** carro. En la segunda, deja **la mitad** de los carros que le quedan, **más 1** carro. Repite la misma operación en las cinco jugueterías restantes y, al final, se queda con **un** solo carro. ¿Cuántos tenía al comienzo?

26. *Complete las casillas del siguiente cuadro:*

	x		+		= 9
+	■	+	■	+	■
	x		–		= 0
–	■	+	■	–	■
	+		–		= 4
= 6	■	=8	■	= 5	■

27. Si un niño ha crecido **40** cm durante los dos primeros años, ¿cuánto crecerá durante los **8** años siguientes?

28. *Julián pesa **el doble** de su esposa, ésta **el doble** de su hija, y los tres juntos, **154** kg. ¿Cuánto pesa la niña?*

29. En unas elecciones, un candidato ganador **triplicó** en votos a su oponente, y juntos sacaron **116.000** votos. ¿Cuántos obtuvo el candidato ganador?

30. ***K**, **E** y **D** representan a tres enteros consecutivos. **G** y **B** son otra pareja de enteros consecutivos, diferentes de los anteriores. Se verifica que **E x G B = K E D**. ¿Cuál es el valor de cada letra?*

31. En este momento, la edad de Marcos **triplica** a la de Rosaura, pero dentro de **14** años sólo será **el doble**. ¿Cuántos años tiene Rosaura actualmente?

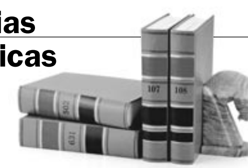
32. *Coloque oportunamente los signos +, –, x entre los dígitos **2 9 6 7** para que se obtenga **17** como resultado de las operaciones indicadas.*

33. Acabamos de enviar un paquete por medio de una agencia. La agencia cobra **5.000** pesos por los primeros **5** kg; por cada uno de los siguientes **5** kg, la **mitad** del costo por kg de los **5** anteriores; y así sucesivamente. Si hemos pagado **8.000** pesos, ¿cuánto pesa el paquete?

34. *Un vendedor tiene **seis** cestas, unas con huevos de gallina y otras con huevos de codorniz. Los números de huevos en cada cesta son: **6, 29, 12, 23, 5, 14**. El vendedor considera: "Si vendo esta cesta, me quedaría **el doble** de huevos de gallina que de codorniz". ¿A qué cesta se refiere? ¿Qué cestas quedarían conteniendo huevos de codorniz?*

35. Sin efectuar la multiplicación, ¿cuántas cifras enteras y cuántos decimales tiene el producto de **417,201 x 2,56**?

Referencias bibliográficas



– Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

– Maza G., C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. Habrá que ver. Desde luego no serán 42 **2.** 36 **3.** 23 años **4.** 7 hombres **5.** Factores: 415 y 382 **6.** 5 sacos de 15 kg y 7 de 10 kg **7.** Los 5 números **8.** 4.900 pesos **9.** 5.900 pesos **10.** 527 (5 x 2 ≠ 7) **11.** 1ª fila: 3, 0, 1; 2ª fila: 2, 6, 4; 3ª fila: 2, 3, 4 **12.** Las 5 en punto **13.** 7 naranjas **14.** 4 vacas **15.** 1ª fila: 6, 5, 4; 2ª fila: 5, 4, 2; 3ª fila: 9, 1, 1 **16.** A los 11 años **17.** Dentro de 6 años **18.** 21 **19.** 2.034 **20.** El panadero debe 14.500 pesos **21.** 13.000 pesos **22.** 92 x 74 **23.** La opción A **24.** Multiplicando: 117; multiplicador: 319 **25.** 382 **26.** Una posible respuesta es: 1ª fila: 3, 2, 3; 2ª fila: 4, 1, 4; 3ª fila: 1, 5, 2 **27.** No hay datos para saberlo; no tiene por qué ser 160 cm (4 x 40 cm) **28.** 22 kg **29.** 87.000 votos **30.** 3 x 78 = 234 **31.** 14 años **32.** 2 x 9 + 6 – 7 = 17 **33.** 12 kg **34.** A la de 29 huevos. Las cestas de 6 y 14 huevos **35.** 4 cifras enteras y 5 decimales

Post data: He aquí un texto final, como para reflexionar acerca de la lógica de la multiplicación dentro de la lógica de la vida…

El turista se plantó frente al tarantín. En él, junto al indígena, había una pila de sillas elaboradas artesanalmente.

–¿Cuánto cuesta esta silla? –preguntó, mientras señalaba la primera de la pila.

–10 pesos.

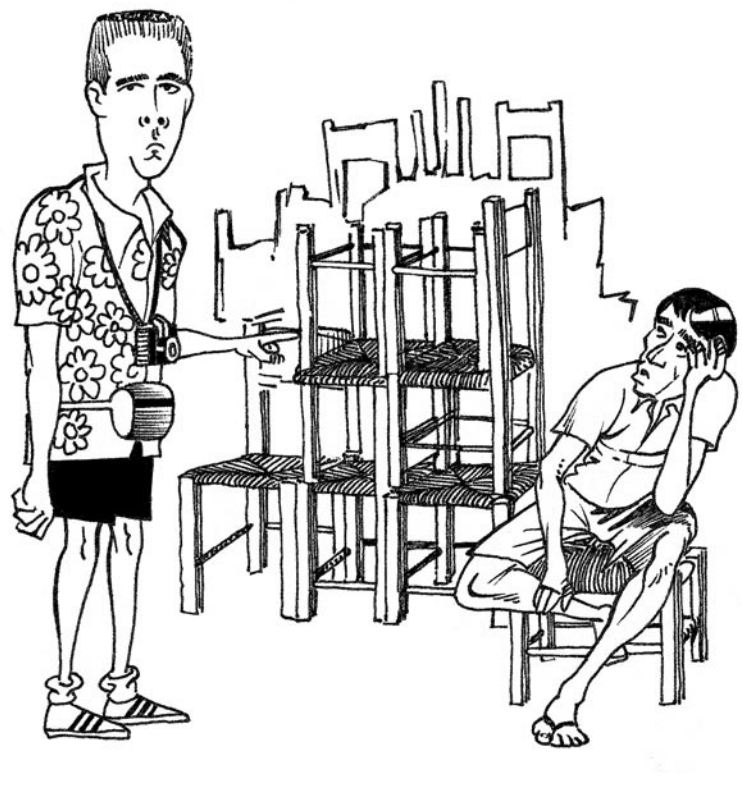
–¿Cuánto cuestan todas?

–200 pesos.

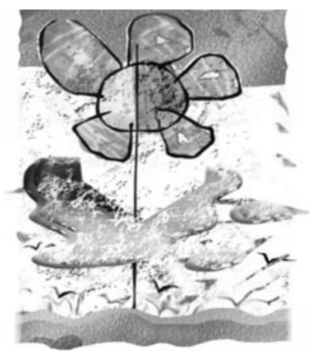
–Pero, ¿cómo 200, si sólo hay 10 sillas?

–La primera la hago por gusto y cuesta 10 pesos. Las demás las hago por dinero.

[Escena y diálogo de la película franco–mexicana "¿No oyes ladrar los perros?"]



Índice



*Este libro se terminó de imprimir
en el mes de septiembre de 2005.*