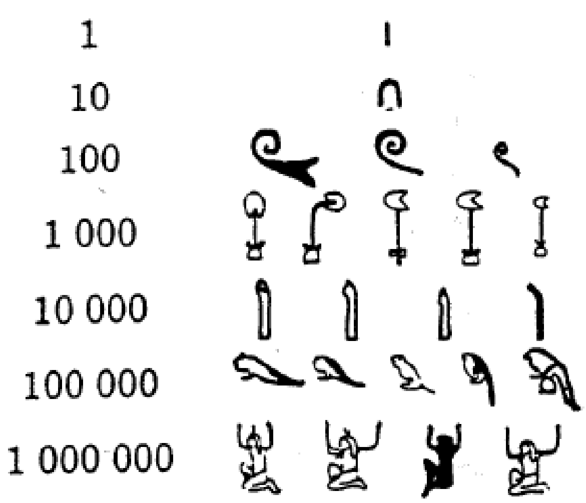
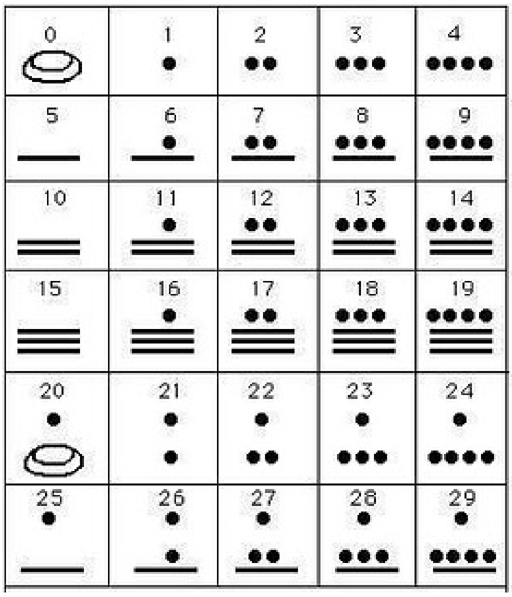
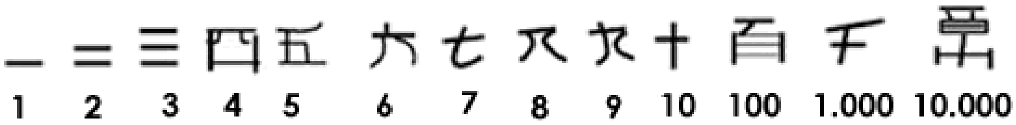
EGIPCIO



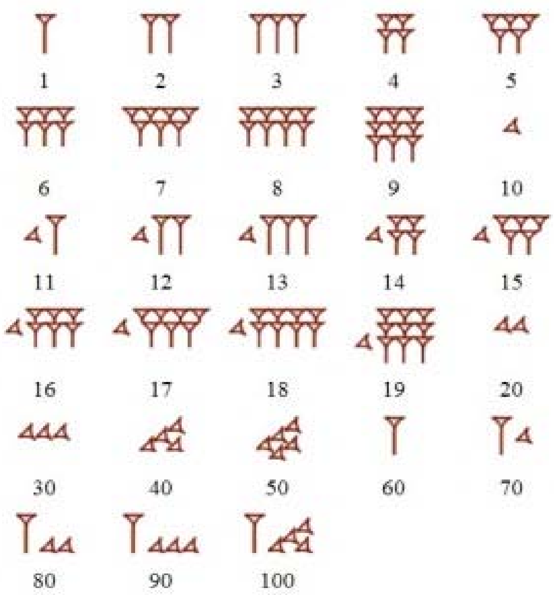
MAYA



CHINO



BABILÓNICO



ROMANA

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

Evolución histórica de los sistemas de numeración.

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que nos permiten expresar verbal y gráficamente los números.

Desde los tiempos primitivos, el hombre ha sentido la necesidad de contar, ya fuera sus piezas de caza, sus utensilios o el número de miembros de su tribu. En este sentido cabe tal vez interpretar algunos indicios antropológicos singulares, como las muescas ordenadas que aparecen incisas en algunas paredes rocosas o en los útiles prehistóricos.

Desde el Neolítico, los sistemas de cómputo y numeración se fueron complicando y enriqueciendo progresivamente. Las grandes civilizaciones de la Antigüedad se distinguieron por un importante desarrollo de la aritmética y la geometría, que desembocó en la creación de sistemas de numeración sistemáticos.

Cuando los hombres empezaron a contar usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece se hace necesario un sistema de representación más práctico.

En diferentes partes del mundo y en distintas épocas se llegó a la misma solución, cuando se alcanza un determinado número se hace una marca distinta que los representa a todos ellos. Este número es la base.

> *La base de un sistema de numeración es el número de unidades que se han de agrupar dentro de un orden dado para formar una unidad del orden inmediatamente superior*

La base que más se ha utilizado a lo largo de la Historia es 10 según todas las apariencias por ser ese el número de dedos con los que contamos. Desde hace 5000 años la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. es decir de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. Sin embargo la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el cálculo.

El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. El gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones.

A continuación se comentan brevemente, diversos sistemas de numeración escritos, que han sido construidos a partir de principios diferentes:

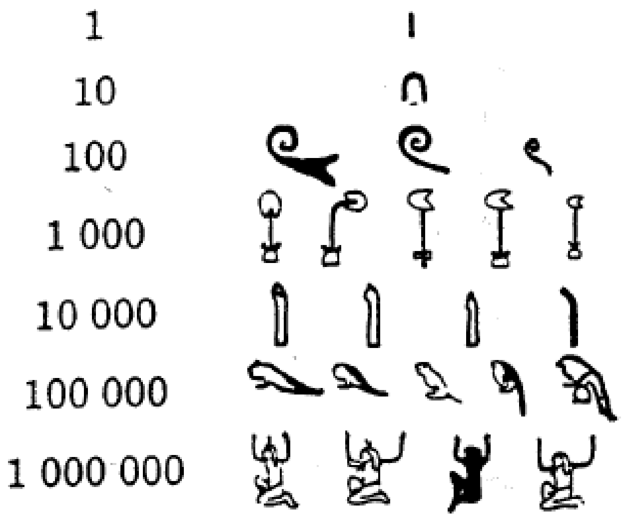
- **Aditivo.** Tienen símbolos para la unidad, la base y las potencias de la base. El número representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación.
- **Multiplicativo.** Se caracteriza por tener símbolos para la unidad, la base, sus potencias y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. Es decir, utiliza nuevos signos para indicar las veces que se repite alguno de los símbolos numéricos, evitando así su reiteración.
- **Posicional.** Este principio establece que el valor de una cifra, o símbolo numérico, es relativo, es decir, depende del lugar que ocupe en la escritura del número. No se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero. En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. De este tipo es nuestro sistema de numeración y como ya sabemos tenemos símbolo para la unidad, para los comprendidos ente la unidad y la base y muy importante para la ausencia de número (cero).

Sistema jeroglífico egipcio (Aditivo)

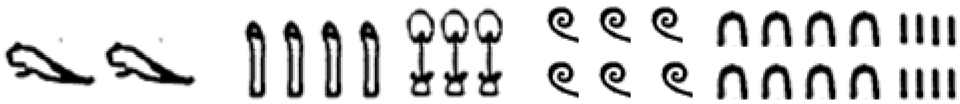
Se basa en la definición de símbolos para la unidad, la base (diez) y las potencias de la base (potencias de diez).

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema describir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades.

Se usaban tantos de cada uno cómo fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso.



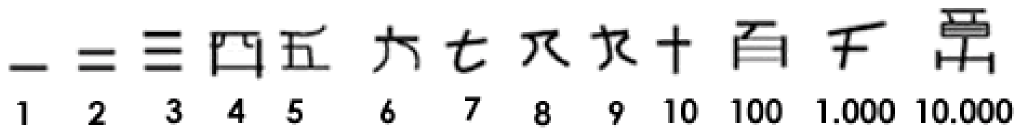
A partir de ahí los números se representan repitiendo esos símbolos todas las veces que haga falta. Por ejemplo, el número 243.688 se representaría de la siguiente manera:



200.000 + 40.000 + 3.000 + 600 + 80 + 8

Sistema Chino (Aditivo y multiplicativo)

En el sistema chino no sólo se tienen símbolos para la unidad, la base (diez) y las potencias de la base (potencias de diez), sino para todos los números intermedios entre uno y diez.



De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas, pues los números que preceden a las potencias de la base, indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:

7 x 10000 + 9 x 1000 + 5 x 100 + 6 x 10 + 4

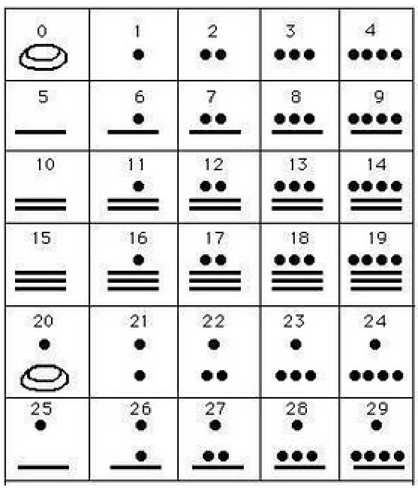
aunque hay que tener en cuenta que los chinos escriben de arriba hacia abajo; en este caso, los números 7, 9, 5 y 6 actúan como multiplicadores.

Sistema de Numeración Maya (Aditivo, multiplicativo y posicional)

Los mayas idearon un sistema de base 20 con el 5 cómo base auxiliar. La unidad se representaba por un punto. Dos, tres, y cuatro puntos servían para 2, 3 y 4. El 5 era una raya horizontal, a la que se añadían los puntos necesarios para representar 6, 7, 8 y 9. Para el 10 se usaban dos rayas, y de la misma forma se continúa hasta el 20, con cuatro rayas.

Hasta aquí parece ser un sistema de base 5 aditivo, pero en realidad, considerados cada uno un solo signo, estos símbolos constituyen las cifras de un sistema de base 20, en el que hay que multiplicar el valor de cada cifra por 1 (primer orden), 20 (segundo orden), 20x20 (tercer orden), 20x20x20 (cuarto orden)... según el lugar que ocupe, y sumar el resultado. Es por tanto un sistema posicional que se escribe a arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor.

Al tener cada cifra un valor relativo según el lugar que ocupa, la presencia de un signo para el cero, con el que indicar la ausencia de unidades de algún orden, se hace imprescindible y los mayas lo usaron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula.



Por ejemplo, 2.942 = 7 x 20 x 2 + 7 x 20 + 2 x 1

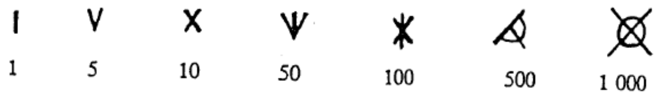
7 x 20 x 20

7 x 20

2 x 1

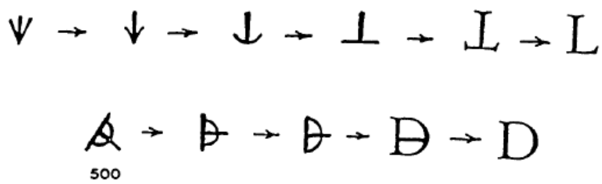
Numeración Romana (Aditivo, sustractivo, multiplicativo y posicional)

En Italia, antes del Imperio Romano existían pueblos de pastores que habían desarrollado una cultura de muescas. Por cada cabeza de ganado que contaban grababan una muesca en un palo o hueso. Para facilitar la lectura de las muescas empezaron a agruparlas de cinco en cinco haciendo marcas separadoras que sintetizasen la información numérica contenida en las muesca. Al llegar a la quinta muesca grababan un trazo oblicuo y en la décima dos trazos oblicuos cruzados. Volvían a grabar el trazo oblicuo en la muesca número 15 y el aspa en la número 20. Para facilitar la lectura de números más grandes inventaron signos específicos para 50, 100, 500 y 1000.



El siguiente avance se produce cuando esos pastores se dan cuenta de que no es necesario grabar todas las muescas puesto que algunas de ellas ya recogen toda la información anterior. Es decir, cuando descubren que para expresar el número IIIIV IIIIV IIIIX IIIV II es suficiente con escribir XXVII

Los romanos heredaron estas marcas y acabaron por identificarlas con algunas letras.



Así, el trazo oblicuo se identificó con la letra V, el aspa con la X, la marca para 50 se transformó en una L, la de 100 en una C, y la de 500 y 1000 en una D y una M, respectivamente.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

Además añadieron una última modificación al sistema consistente en introducir un principio sustractivo para acortar la escritura de ciertos números. De acuerdo con este principio escribían IV en vez de IIII, IX en vez de VIIII, XL en ve de XXXX, etc.

Estamos pues ante un sistema de tipo aditivo, aunque con irregularidades, de base 10 y con una base auxiliar 5. Tiene base posicional porque no es lo mismo poner 9 (IX) a poner 11 (XI). Y es multiplicativo, porque cuando a un numero romano se le pone una raya en la esquina superior derecha se multiplica por 1000, es decir, que si la I (1) tiene una rayita encima se va a multiplicar por 1000 que sería igual a 1000 y si la I tiene 2 rayitas encima se multiplica por 1000 y por mil. Así 1 x 1000=1000; 1000 x 1000= 1.000.000 y así sucesivamente.

De esta manera:

2.489 tiene la siguiente representación MMCDLXXXIX

24.535 tiene la siguiente representación $\overline{\text{XXIV}}\text{DXXXV}$

174.012 tiene la siguiente representación $\overline{\text{CLXXIV}}\text{XII}$

Sistema de Numeración Decimal

Nuestro sistema de numeración escrito (Sistema Posicional Decimal) es, una invención hindú que, posteriormente, fue asumida por los árabes, los cuales la difundieron por todo su imperio (Indo-Arábigo). Los contactos comerciales y culturales de Europa con el mundo árabe propiciaron la difusión de este sistema en la Europa occidental donde entró en competencia con el sistema de numeración Romano. Lentamente fue ganando adeptos hasta que a finales del siglo XVIII quedo definitivamente implantado.

Reglas de los sistemas de numeración posicionales

Las reglas de los sistemas de numeración posicional ordenados, se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Elegido un número **B >1** como base del sistema de numeración, se utilizan **B** símbolos, llamados cifras o guarismos (0, 1, 2,..., B-1) que representan el cero y los primeros números naturales.
2. Cada **B** unidades simples (o de 1er orden) forman una unidad de 2º orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 1er orden; cada B unidades de 2º orden forman una unidad de 3er orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 2º orden, y así sucesivamente (Principio del valor relativo de las cifras).
3. Cuando no hay unidades de un orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.

Teorema fundamental

Existencia y unicidad de la expresión de un número n en base cualquiera B.

Dado un número natural B (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural n se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

n |B
$\mathbf{r_1}$ c_1 |B
$\mathbf{r_2}$ c_2 |B
$\mathbf{r_3}$ c_3
.........c_{k-1} |B
$\mathbf{r_k}$ $\mathbf{c_k}$ donde $\mathbf{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k, c_k}$ son menores que **B**

$$n = c_k B^k + r_k B^{k-1} + r_{k-1} B^{k-2} + \ldots + r_3 B^2 + r_2 B + r_1$$

Otra forma de expresarlo es:

$$n = c_k\, r_k\, r_{k-1} \ldots r_3\, r_2\, r_{1(B}$$

Ejemplo 1: Expresar analíticamente el número 2874

2 8 7 4 |10
0 8 7 2 8 7 |10
0 7 4 0 8 7 2 8 |10
0 4 0 7 0 8 2

$$\mathbf{2874 = 2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4 = 2874_{(10}}$$

Ejemplo 2: Expresar analíticamente el número 134

1 3 4 |1 0
3 4 1 3 |10
4 3 1

$$\mathbf{134 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 = 134_{(10}}$$

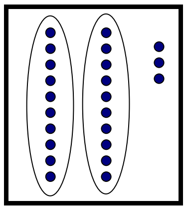
Representación Gráfica

Para representar gráficamente un número natural en una base cualquiera B se procede de la siguiente manera:

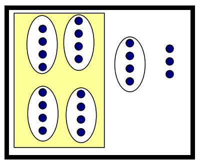
1. Se señalan en un diagrama de Venn los elementos cuyo cardinal es es número dado

2. Se van agrupando de B en B formando las unidades de segundo orden.
3. Si el número de estos subconjuntos formados (unidades de segundo orden) es igual o superior a B se agrupan nuevamente de B en B obteniendo las unidades de tercer orden y así sucesivamente.

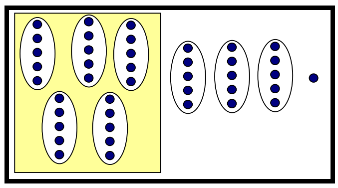
Ejemplo 1: Representar gráficamente el número $23_{(10}$



Ejemplo 2: Representar gráficamente el número $113_{(4}$



Ejemplo 3: Representar gráficamente el número $131_{(5}$



Cambios de sistema

Expresar un número escrito en base decimal en base no decimal

Sea n un número escrito en base 10. Para expresarlo en base no decimal (**B**) procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llllllll}
n & \underline{|B} & & & & & & \\
r_1 & c_1 & \underline{|B} & & & & & \\
 & r_2 & c_2 & \underline{|B} & & & & \\
 & & r_3 & c_3 & & & & \\
 & & & \ldots\ldots\ldots c_{k-1} & \underline{|B} & & & \\
 & & & & r_k & c_k & & c_k<B
\end{array}$$

$$\mathbf{n = c_k\, r_k \ldots r_3\, r_2\, r_{1(B}}$$

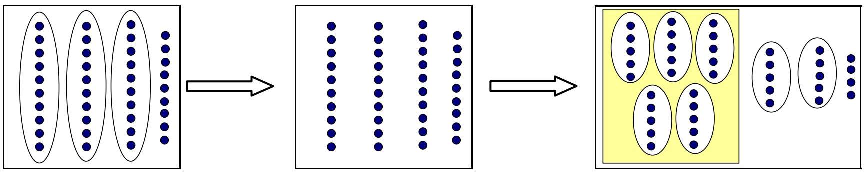
Por ejemplo, 39 en base 10 expresarlo en base 5

a) Analíticamente:

39 | 5
4 7 | 5
2 1

$39 = 1 \,.\, 5^2 + 2 \,.\, 5 + 4 = 1\,2\,4_{(5}$

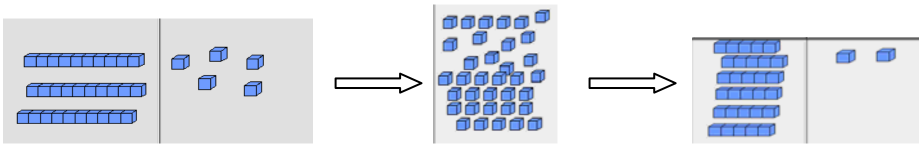
b) Gráficamente:



39 **$124_{(5}$**

http://www.arcytech.org/java/b10blocks/b10blocks.html

Ejemplo del número 35 en base 10 transformado en $62_{(5}$ con los Bloques Aritméticos.



35 **$62_{(5}$**

Expresar un número escrito en base no decimal en base decimal

Sea $\mathbf{a_k\ a_{k-1}\ldots a_3\ a_2\ a_{1(B}}$ un número escrito en base B. Para expresarlo en base 10 procedemos de la siguiente forma:

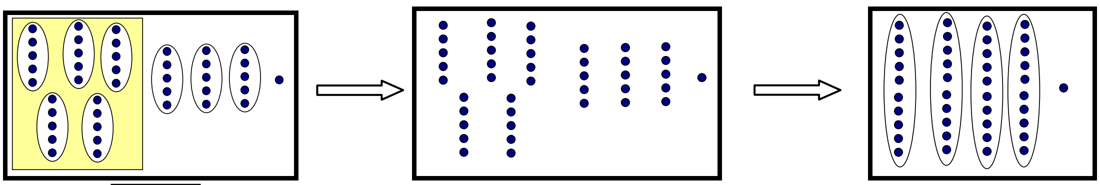
$$\mathbf{n = a_k\, B^{k-1} + a_{k-1}\, B^{k-2} + \ldots + a_3 B^2 + a_2 B + a_1}$$

siendo n el número expresado en base 10.

Por ejemplo, expresar el número $131_{(5}$ en base 10

a) Analíticamente: $\mathbf{131_{(5} = 1\,.\,5^2 + 3\,.\,5 + 1 = 25 + 15 + 1 = 41}$

b) Gráficamente:



$131_{(5}$ **41**

Expresar un número en base no decimal en otra base no decimal

Para expresar un número escrito en base no decimal B en otra base no decimal B' procedemos como se explicó en los casos anteriores. Primero lo pasamos a base decimal y luego, el número escrito en base decimal lo expresamos en la nueva base no decimal.

Sea $\mathbf{a_k\ a_{k-1}\ldots a_3\ a_2\ a_{1(B}}$ un número escrito en base B. Para expresarlo en base B' procedemos de la siguiente forma:

$$\mathbf{n = a_k\, B^{k-1} + a_{k-1}\, B^{k-2} + \ldots + a_3 B^2 + a_2 B + a_1}$$

siendo n el número expresado en base 10. Luego procedemos a expresar el número n en la base B':

$n \;\underline{|B'}$
$r_1\;\; c_1 \underline{|B'}$
$\quad r_2\;\; c_2 \underline{|B'}$
$\qquad r_3\;\; c_3$
$\qquad\quad \ldots\ldots\ldots c_{k-1} \underline{|B'}$
$\qquad\qquad r_k\;\; c_k \qquad\qquad c_k < B'$
$\mathbf{n = c_k\, r_k \ldots r_3\, r_2\, r_1}$

Ejemplo: Expresar el número $131_{(5}$ en base 3

a) Analíticamente:

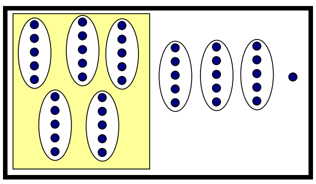
Primer paso: $131_{(5}$ expresado en base 10

$$\mathbf{131_{(5} = 1 \,.\, 5^2 + 3 \,.\, 5 + 1 = 25 + 15 + 1 = 41}$$

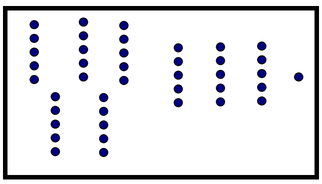
Segundo paso: 41 expresado en base 3

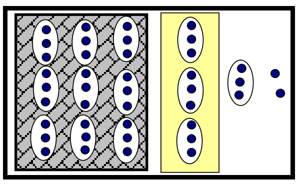
$41 \;\underline{|3}$
$11\;\; 13 \underline{|3}$
$\;2\;\;\; 1\;\;\; 4 \underline{|3}$
$\qquad\quad 1\;\; 1$
$\mathbf{41 = 1112_{(3}}$

b) Gráficamente:



$131_{(5}$





$1112_{(3}$

Operaciones

Suma y Resta

Para sumar o restar dos números, lo primero que hay que hacer es expresarlos en la misma base.

$$\begin{array}{r} 4\,8\,2\,6_{(9} \\ +\ 1\,4\,2\,8_{(9} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,8\,{}^{1}2\,6_{(9} \\ +\ 1\,4\,2\,8_{(9} \\ \hline 9{+}5_{(9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}4\,8\,{}^{1}2\,6_{(9} \\ +\ 1\,4\,2\,8_{(9} \\ \hline 9{+}3\,5\,5_{(9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}4\,8\,{}^{1}2\,6_{(9} \\ +\ 1\,4\,2\,8_{(9} \\ \hline 6\,3\,5\,5_{(9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\,2\,4\,5_{(7} \\ -\ 2\,4\,5\,6_{(7} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 4\,2\,\cancel{4}\,5_{(7} \\ -\ 2\,4\,5\,6_{(7} \\ \hline 6_{(7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,\,3 \\ 4\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,5_{(7} \\ -\ 2\,4\,5\,6_{(7} \\ \hline 5\,6_{(7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,1\,3 \\ \cancel{4}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,5_{(7} \\ -\ 2\,4\,5\,6_{(7} \\ \hline 4\,5\,6_{(7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\,2\,4\,5_{(7} \\ -\ 2\,4\,5\,6_{(7} \\ \hline 1\,4\,5\,6_{(7} \end{array}$$

Multiplicación

Para multiplicar dos números, lo primero que hay que hacer es expresarlos en la misma base.

$$\begin{array}{r} 3\,1\,2\,0\,1\,2_{(5} \\ \times\ \ 4_{(5} \\ \hline 2\,3\,0\,3\,1\,0\,3_{(5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,1\,4\,2\,0\,5\,6_{(7} \\ \times\ \ 2\,5_{(7} \\ \hline 2\,2\,1\,0\,3\,4\,1\,2\phantom{_{(7}} \\ 6\,3\,1\,4\,1\,4\,5\phantom{\,2_{(7}} \\ \hline 1\,1\,5\,2\,4\,5\,1\,6\,2_{(7} \end{array}$$

División

Antes de efectuar la división es conveniente construir la tabla de multiplicar en dicha base.

4 5 3 2 1 0 $_{(6}$ entre 5

5 x 1 = 5
5 x 2 = 14
5 x 3 = 23
5 x 4 = 32
5 x 5 = 41

$$\begin{array}{l|l} 4\,5\,3\,2\,1\,0_{(6} & 5 \\ \cline{2-2} -\,4\,1 & 5\,5\,2\,5\,0 \\ \quad 4\,3 & \\ \quad -\,4\,1 & \\ \qquad 2\,2 & \\ \qquad -\,1\,4 & \\ \qquad\ \ 4\,1 & \\ \qquad\ \ -\,4\,1 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

3 2 0 7 6 5 1 $_{(8}$ entre 47

47 x 1 = 47
47 x 2 = 116
47 x 3 = 165
47 x 4 = 234
47 x 5 = 303
47 x 6 = 352
47 x 7 = 421

$$\begin{array}{l|l} 3\,2\,0\,7\,6\,5\,1_{(8} & 47 \\ \cline{2-2} -\,3\,0\,3 & 5\,2\,6\,7\,4 \\ \quad 1\,5\,7 & \\ \quad -\,1\,1\,6 & \\ \qquad 4\,1\,6 & \\ \qquad -\,3\,5\,2 & \\ \qquad\quad 4\,4\,5 & \\ \qquad\quad -\,4\,2\,1 & \\ \qquad\qquad 2\,4\,1 & \\ \qquad\qquad -\,2\,3\,4 & \\ \qquad\qquad\qquad 5 & \end{array}$$