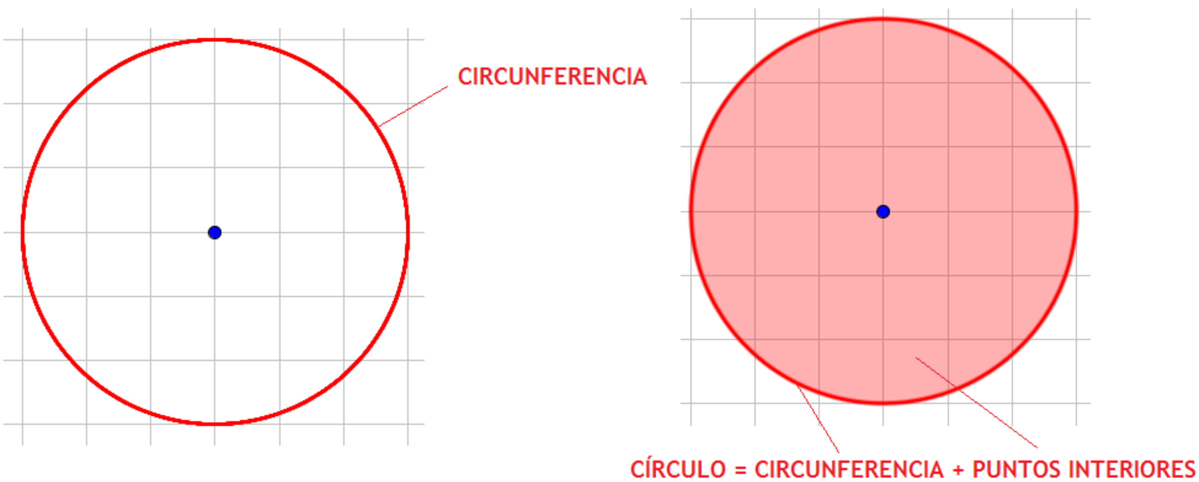
Lección 2.1: Circunferencia y círculo

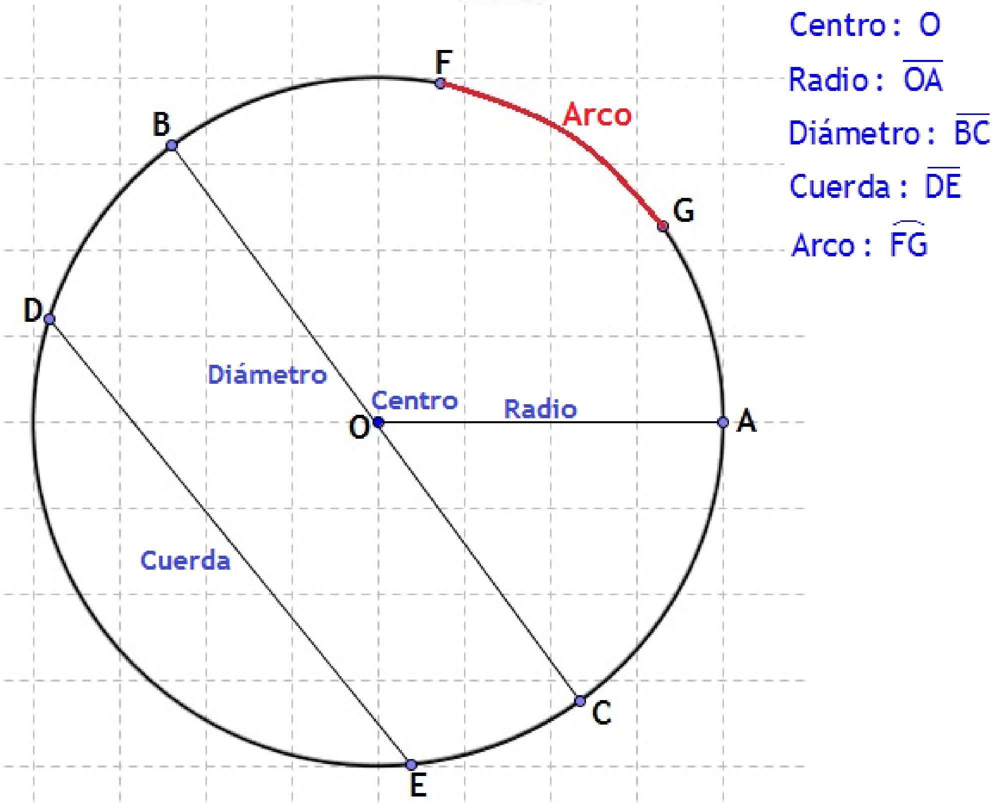
La circunferencia y el círculo

La circunferencia es una línea curva cerrada y plana con todos sus puntos a igual distancia del centro. El círculo es una figura plana limitada por una circunferencia y su interior.



No es lo mismo la circunferencia que el círculo. La circunferencia es la línea curva y cerrada cuyos puntos están a la misma distancia del centro; y el circulo, el espacio que queda dentro de la circunferencia. Por lo tanto, cuando hablamos de área, lo hacemos del área del círculo y no de la circunferencia.

Podemos encontrar los siguientes elementos: el centro, el radio, el diámetro, la cuerda y el arco.



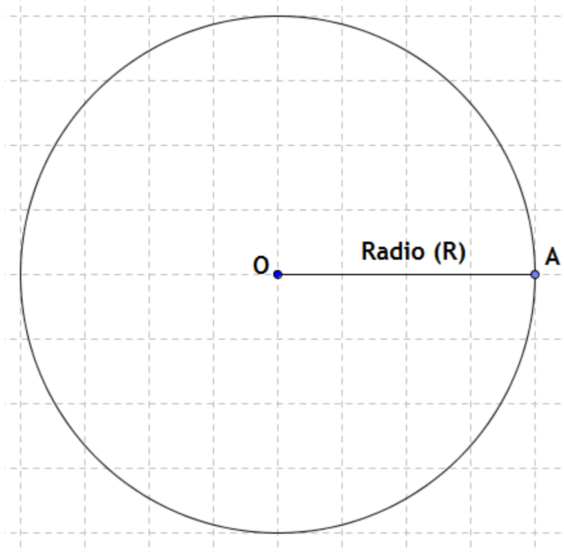
Elementos del círculo

Puntos

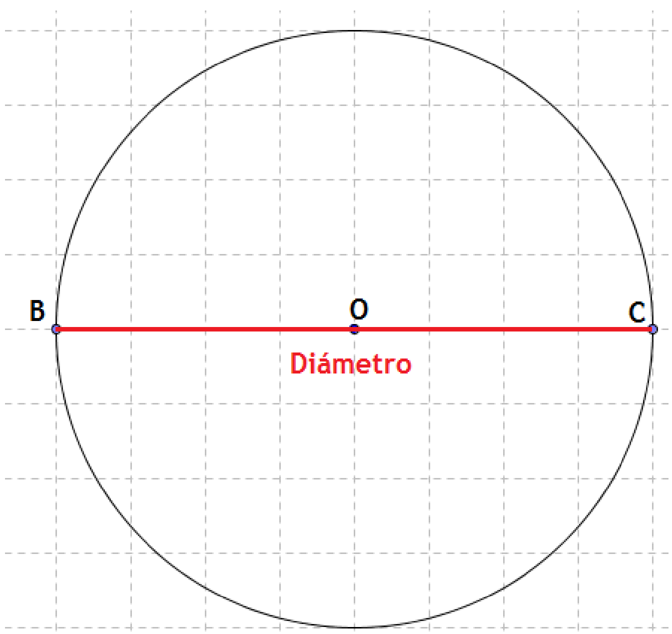
Centro del círculo, que se corresponde con el centro de la circunferencia, del cual equidistan todos los puntos de esta.

Rectas y segmentos

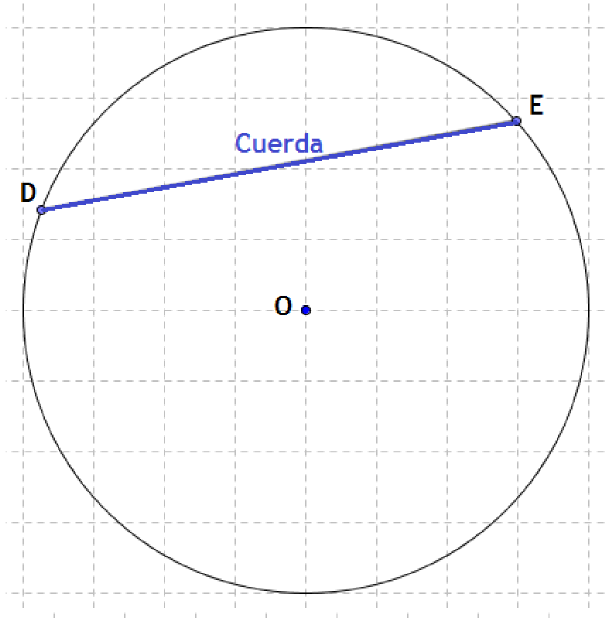
Radio: es el segmento que une el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.



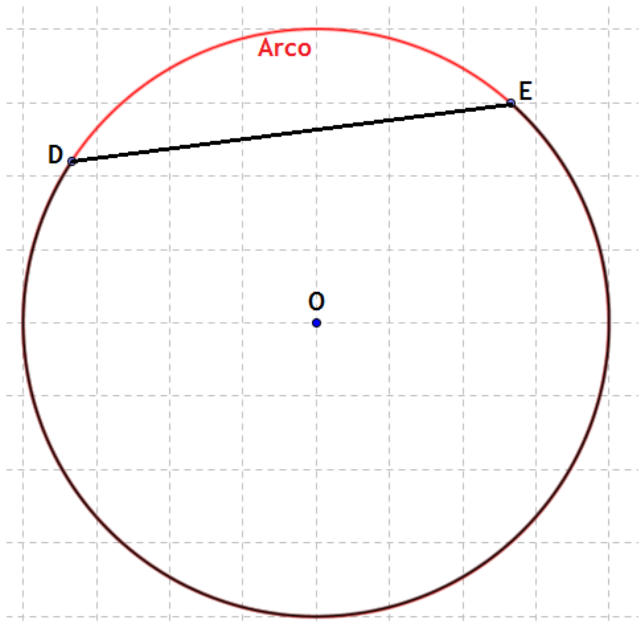
Diámetro: es el mayor segmento inscrito; pasa por el centro y divide al círculo en dos.



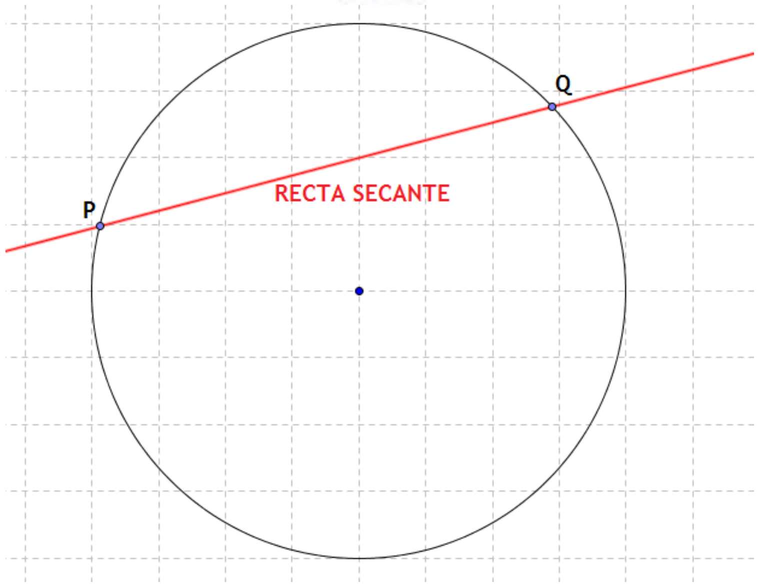
Cuerda: es el segmento que une los extremos de un arco.



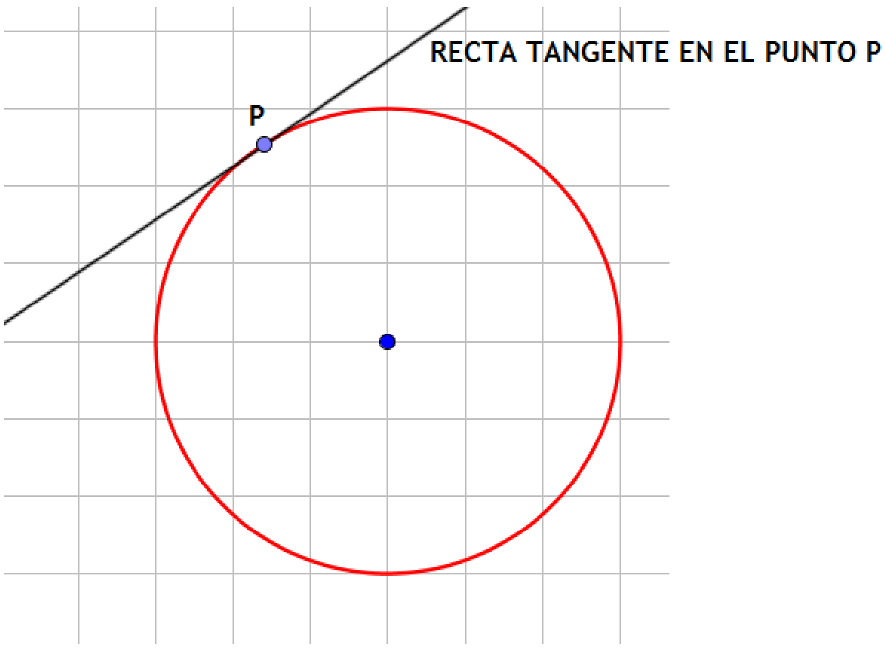
Arco: es una parte de la circunferencia de la figura.



Recta secante: Es la recta que corta al círculo en dos partes de diferente área.



Recta tangente: es la recta que toca al círculo en un solo punto; es perpendicular al radio cuyo extremo es el punto de tangencia.

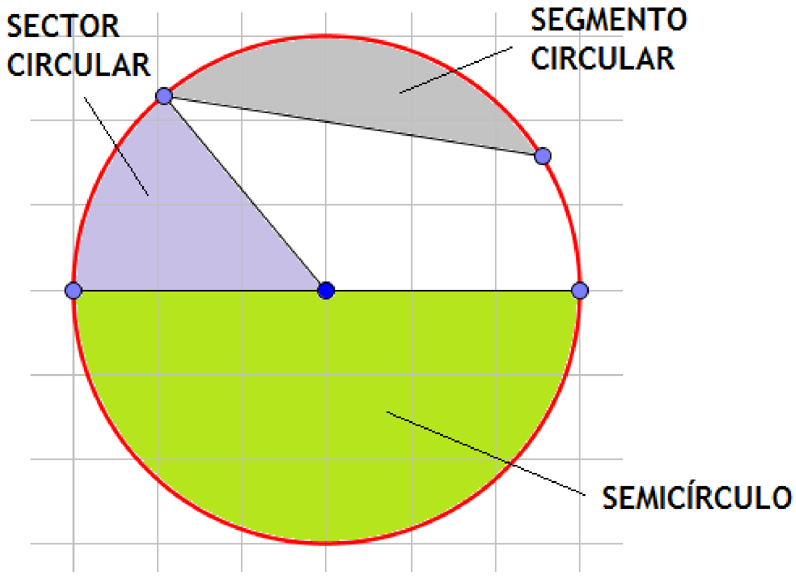


Las figuras circulares más importantes son:

a) **Semicírculo:** cada una de las partes que resultan de dividir a un círculo con un diámetro.

b) **Sector circular:** parte del círculo limitado por dos radios y su arco.

c) **Segmento circular:** parte del círculo limitada por una cuerda y su arco.



Longitud de una circunferencia

La circunferencia es una línea difícil de medir; pero puede calcularse a partir de la medida del radio, aplicando la propiedad fundamental del círculo.

La propiedad fundamental del círculo indica que la relación entre la medida de la circunferencia (C) y el diámetro (d) es un valor constante de 3.141592…; el cual se designa con la letra griega π (pi). Es decir, para cualquier circunferencia se cumple:

$$\frac{C}{d} = \pi \;;\; \pi = 3.141592\ldots$$

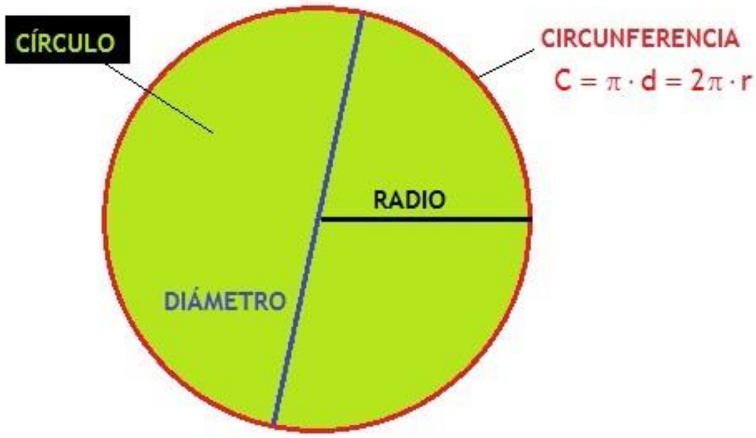
Hallar la circunferencia es determinar la longitud de la línea que forma el círculo. Para calcular esta longitud solo se necesita despejar de la propiedad fundamental del círculo y evaluar la siguiente fórmula:

$$C = \pi \cdot d$$

Donde C es la medida de la circunferencia, d es la medida del diámetro y π es una constante que su valor aproximado a la centésima más cercana es 3.14.

Como la longitud del diámetro es 2 veces el radio, podemos decir también que:

$$C = 2\pi \cdot r$$



Ejemplos:

1) Halla la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 6 cm.

Opción 1:

Sustituimos el valor del diámetro en $C = \pi \cdot d$.

Multiplicamos 6 cm por el valor de π y se obtiene el valor exacto de la circunferencia:

$$C = \pi \cdot (6\text{cm}) = \boxed{6\pi \text{ cm}}$$

Si se quiere hallar un valor aproximado, se reemplaza π por 3.14 y se multiplica por 6 cm:

$$C = \pi \cdot d \approx 3.14 \cdot (6\text{cm}) \approx \boxed{18.84 \text{ cm}}$$

La longitud de la circunferencia es de aproximadamente 18.84 cm.

Opción 2:

Como el diámetro es el doble del radio, entonces el radio es 3 cm: $C = 2\pi \cdot r$

Multiplicamos y obtenemos el valor exacto:

$$C = 2\pi \cdot (3cm) = 6\pi\ cm$$

Para obtener un valor aproximado reemplazamos π por 3.14:

$$C = 2\pi \cdot r \approx 2(3.14)\cdot(3cm) \Rightarrow \boxed{C \approx 18.84\ cm}$$

Observa que obtenemos el mismo resultado, por lo que puedes utilizar la opción que prefieras.

2) Calcula la medida de la circunferencia si el radio es 5 m.

Usando la fórmula $C = 2\pi \cdot r$

$$C = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot (5cm)$$

$$\boxed{C = 10\pi\ cm}$$

Usando la fórmula $C = \pi \cdot d$

$$r = 5cm \Rightarrow d = 2(5cm) = 10cm$$

$$C = \pi \cdot d = \pi \cdot (10cm)$$

$$\boxed{C = 10\pi\ cm}$$

El valor exacto de la circunferencia es 10π cm.

El valor aproximado se puede calcular reemplazando π por 3.14:

$$C = 10\pi\ cm \approx 10(3.14)\ cm \approx \boxed{31.4\ cm}$$

3) Calcula la medida del diámetro y el radio si la circunferencia mide 12 metros.

Nuevamente sustituimos en cualquier de las 2 opciones.

Reemplazamos en $C = \pi \cdot d$ utilizando la aproximación de $\pi \approx 3.14$ y despejamos el diámetro:

$$C = \pi \cdot d \Rightarrow 12m = 3.14 \cdot d$$

$$\frac{12m}{3.14}=\frac{\cancel{3.14}\cdot d}{\cancel{3.14}}\Rightarrow \boxed{3.82m=d}$$

Ahora se determina el valor del radio:

$$d=2r\Rightarrow r=\frac{d}{2}=\frac{3.82m}{2}\Rightarrow \boxed{r=1.91m}$$

4) Determina el valor del radio de un círculo si la longitud de su circunferencia mide 20π cm.

Como la incógnita es el radio partimos de la expresión $C=2\pi\cdot r$:

$$C=2\pi\cdot r\Rightarrow 20\pi cm=2\pi\cdot r$$

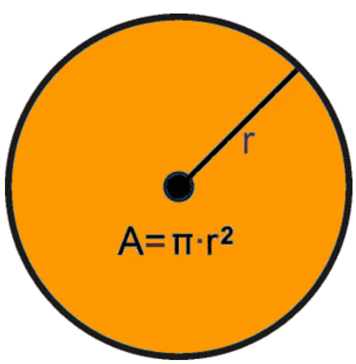
$$\frac{20\cancel{\pi}cm}{2\cancel{\pi}}=\frac{\cancel{2\pi}\cdot r}{\cancel{2\pi}}\Rightarrow r=\frac{20cm}{2}\Rightarrow \boxed{r=10cm}$$

Área del círculo

Para determinar el área de un círculo conociendo su radio, se debe utilizar la fórmula:

$$A=\pi\cdot r^2$$

Solo se necesita conocer la medida del radio y se evalúa en la fórmula.



Para hallar el área en función del diámetro, reemplazamos el radio por su relación con el diámetro, es decir por r = D ÷ 2:

$$A = \pi \cdot r^2 \to r = D \div 2 \to A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2$$

Ejemplos resueltos:

1) **Determina el área de un círculo con radio de 5 metros.**

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot (5m)^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 25m^2$$

$$A = 25\pi \ m^2 \Rightarrow A \approx 78.54 \ m^2$$

El área del círculo es aproximadamente 78.54 m^2.

2) **Determina el área de un círculo si su diámetro es de 6 cm.**

La información que se tiene es el diámetro, ya que el diámetro es el doble del radio, quiere decir que el radio es 3 cm.

$$D = 6 \ cm \Rightarrow r = \frac{D}{2} = 3 \ cm$$

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot (3cm)^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 9cm^2$$

$$A = 9\pi \ cm^2 \Rightarrow A \approx 28.27 \ cm^2$$

El área del círculo es aproximadamente 28.26 cm^2.

El ejercicio anterior lo podríamos haber resuelto usando la fórmula del área en función del diámetro:

$$A = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}\pi \cdot (6cm)^2$$

$$A = \frac{1}{4}\pi \cdot 36cm^2 \Rightarrow A = 36 \cdot \frac{1}{4}\pi\ cm^2 \Rightarrow \boxed{A = 9\pi\ cm^2}$$

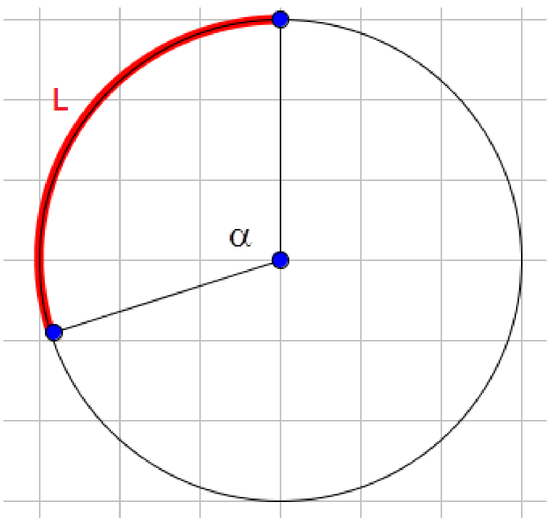
3) Determina el radio de un círculo si su área es 328 cm².

$$A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow 328cm^2 = \pi \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{328cm^2}{\pi} = r^2 \Rightarrow r \approx \sqrt{104.41cm^2} \Rightarrow r \approx 10.22\ cm$$

Longitud y área de figuras circulares

Longitud de un arco de circunferencia



La longitud *L* de un arco de circunferencia de diámetro *d*, que abarca un ángulo central de amplitud α es la fracción de la circunferencia total igual a:

$$L = \frac{\alpha}{360} \cdot C \Rightarrow \boxed{L = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot d}$$

Ejemplo:

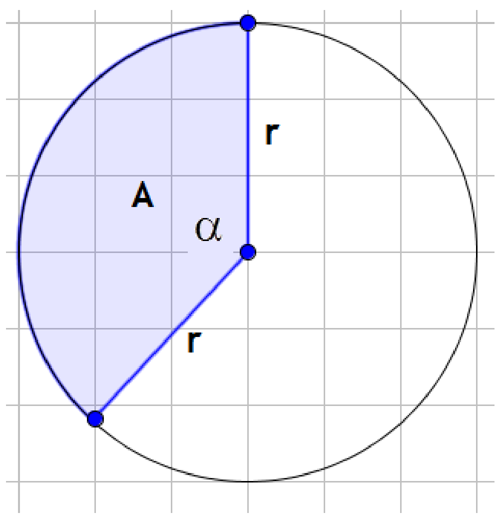
Calcula la longitud del arco de circunferencia determinado por un ángulo central de 60° en una circunferencia de 16 cm de radio.

Solución:

$$A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot d \Rightarrow d = 2 \cdot 16cm = 32cm \Rightarrow A = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 32cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 32cm \Rightarrow A = \frac{32}{6} \cdot \pi cm \Rightarrow \boxed{A = \frac{16}{3} \cdot \pi cm}$$

Sector circular



Se denomina sector circular a la región del plano limitada por un arco de circunferencia y dos radios de la misma.

Se puede calcular el área A de un sector circular con ángulo central α, resolviendo la siguiente fracción:

$$L = \frac{\alpha}{360} \cdot A_d \Rightarrow \boxed{L = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2}$$

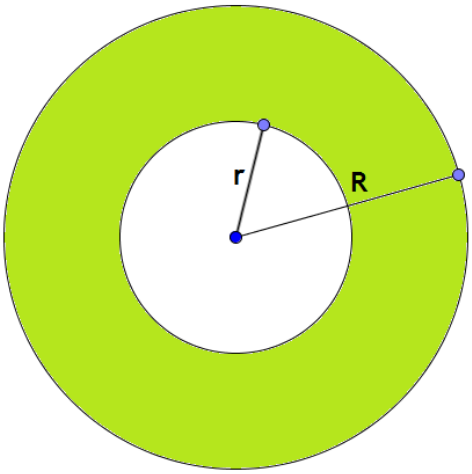
Ejemplo:

Calcula el área de un sector circular de 16 cm de radio y 40º de amplitud.

Solución:

$$A=\frac{\alpha}{360}\cdot\pi\cdot r^2 \Rightarrow A=\frac{40}{360}\cdot\pi\cdot(16cm)^2 \Rightarrow A=\frac{1}{9}\cdot\pi\cdot 256cm^2 \Rightarrow \boxed{A=\frac{256}{9}\cdot\pi cm^2}$$

Corona circular



Se denomina corona circular a la región del plano limitada por dos circunferencias concéntricas. Se puede calcular el **perímetro** y el **área de una corona.**

El perímetro es la suma de las longitudes de las dos circunferencias que la delimitan:

$$P_{corona}=2\pi\cdot R+2\pi\cdot r \Rightarrow \text{factor común } 2\pi \Rightarrow \boxed{P=2\pi(R+r)}$$

El área de la corona es igual a la diferencia entre el área del círculo mayor y el área del círculo menor:

$$A=A_{d\ mayor}-A_{d\ menor} \Rightarrow A=\pi\cdot R^2-\pi\cdot r^2 \Rightarrow \text{factor común } \pi \Rightarrow \boxed{A=\pi\left(R^2-r^2\right)}$$

Ejemplo:

Hallar el área de la siguiente corona circular sabiendo que el radio mayor mide R=12 cm y el radio menor es r=8 cm:

Estrategia: **área de la corona = área del círculo mayor - área del círculo menor**

- $A_{MAYOR} = \pi \cdot R^2 \Rightarrow A_{MAYOR} = \pi \cdot (12cm)^2 \Rightarrow A_{MAYOR} = 144\pi\ cm^2$
- $A_{MENOR} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{MENOR} = \pi \cdot (8cm)^2 \Rightarrow A_{MENOR} = 64\pi\ cm^2$
- $A_{CORONA} = A_{MAYOR} - A_{MENOR} \Rightarrow A_{CORONA} = 144\pi\ cm^2 - 64\pi\ cm^2$
- $A_{CORONA} = 80\pi\ cm^2$

Enlaces de apoyo:

http://www.portaleducativo.net/octavo-basico/762/Circulo-y-circunferencia-area-perimetro-longitud

http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/100208_circulo_circunf.elp/crculo_y_circunferencia.html

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/circulos.html

Referencias:

Quintero, A. & Costas, N. (1994). *Geometría*. San Juan, P.R.: Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Nogueira, G. (2003). *Problemas con medidas*. Buenos Aires: Grulla.