RAZONAMIENTO LÓGICO 8° PERIODO 2

Introducción al lenguaje algebraico

Hasta ahora en la mayor parte de las situaciones estudiadas se han trabajado expresiones aritméticas o leguaje aritmético.
Para recordar este tipo de lenguaje vamos a representar varias situaciones de la vida cotidiana mediante un lenguaje aritmético.

1. Compro tres manzanas a 800 cada una y 2 peras a 900. ¿Cuál será el costo total?

(3 x 800) + (2 x 900)

2. Un comerciante vendió durante el día 7 tortas a 8000 cada una y las compra a 5000 ¿cuál será la ganancia total obtenida?

(8 x 8000) – (8 x 5000)

3. Compre 3 libras de carne en 148000 ¿?cuánto vale cada libra?

14800 / 3

Dentro del ámbito de las matemáticas y las demás ciencias se ha tratado de buscar siempre patrones o conocimientos que sean cada vez más generales y que representen una situación de la forma más sencilla posible. En matemáticas por ejemplo son muy comunes las denominadas formulas o teoremas, entre ellos podemos mencionar

- Área de un triángulo = $\frac{b \times h}{2}$
- El costo de los productos comprados de un mismo tipo es igual al valor de la unidad por el número de unidades.
- El cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rectángulo debe ser igual a la suma de cada uno de los cuadrados de los catetos.

Cuando se empiezan a tratar de hacer generalizaciones de estos conocimientos básicos que se tenían, empieza a aparecer también el lenguaje algebraico, esto es una combinación entre números y letras (incógnitas) para expresar diferentes tipos de situaciones, aunque ello no implica que se dejen de utilizar los mismos conceptos de las operaciones básicas que siempre se han manejado, más bien surgen como un complemento de estas.

Expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una combinación de variables y números reales (constantes) a partir de los operadores suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Término: es cada uno de los sumandos que componen una expresión algebraica.
En un término sólo hay multiplicaciones, pero por consenso cuando son variables no se escribe nunca entre ellas el signo de multiplicación. Ejemplo

No se escribe 3 • x • y sino 3xy

Partes de un término

Coeficiente o parte numérica: es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal o variable: está constituida por las letras y sus respectivos exponentes.

Grado de un término o monomio: es la suma de todos los exponentes que lo conforman.

Grado de un polinomio: es el grado más grande entre los grados de los términos conforman el polinomio.

Grado de una variable: es el exponente de la variable mencionada.

Según el número de términos que la conformen las expresiones algebraicas se clasifican en:

Monomio: es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia

$-2x$ $\qquad \frac{3}{4}h^2n^3$ $\qquad 3y^2(2x+4)$

Binomio: expresión compuesta por dos términos

$$2xy-\frac{3}{4}x^2y^3 \qquad -3{,}2ab-\frac{2}{6}a^2b^3$$

Trinomio: expresión conformada por 3 términos

$$4+4a^3b^2+5(x-1)$$

Polinomio: expresión conformada por dos o más términos.

$$4+4a^3-10b+6ab^2$$

Las expresiones algebraicas son utilizadas frecuentemente para representar enunciados en los cuales se desconoce una o más cantidades. Dichas cantidades se les denominan incógnitas.

Ejemplo 1

Convertir en expresiones algebraicas los siguientes enunciados

El triple de un número disminuido en 6

$$3x-6$$

La mitad de un número disminuido en 8 equivale a 16

$$\frac{1}{2}x-8=16$$

Otras aplicaciones frecuentes donde se utilizan expresiones algebraicas son las fórmulas utilizadas para hallar distancias, áreas y volúmenes, las funciones para relacionar dos o más variables, entre otros.

Operaciones con expresiones algebraicas

Términos semejantes: son aquellos términos que tienen la misma parte literal aunque los coeficientes pueden ser diferentes. Ejemplos

$$4hy^2Z \;\; y \;\; -5hy^2Z$$

Adicción y sustracción de expresiones algebraicas

Para sumar o restar expresiones algebraicas se deben sumar o restar aquellos términos que sean semejantes entre sí. Ejemplo

$$2xy+5xz-6xy+4xz-10ab$$
$$\cancel{2xy}+5xz-\cancel{6xy}+4xz-10ab$$
$$-4xy+9xz-10ab$$

Otra forma de sumar expresiones algébricas es colocando los términos semejantes alineados verticalmente incluyendo los signos, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo

$$2xy+5xz-6xy+4xz-10ab$$

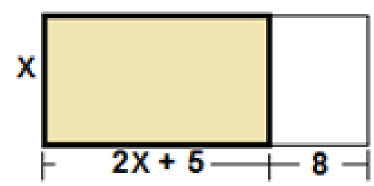
$$\begin{array}{rrr} 2xy & +\ 5xz & -10ab \\ -6xy & +\ 4xz & \\ \hline -4xy & +\ 9xz & -10ab \end{array}$$

Multiplicación de expresiones polinómicas

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio respetando la ley de signos para la multiplicación y la división

Ejemplo 4

A un terreno de forma rectangular cuyo largo mide 5 metros más que el doble de su ancho. Se le anexa otro terreno, en uno de los extremos del ancho, aumentando el largo en 8 metros más y conservando el mismo ancho, tal como se muestra en la figura.



a. Determinar el perímetro de todo el terreno

b. Determinar el área de todo el terreno

Solución parte a

El perímetro de una figura es la suma de todos sus lados, como el lado izquierdo mide lo mismo que el derecho y el dado inferior lo mismo que el superior, se obtiene lo siguiente.

$$P=x+2x+5+8+x+2x+5+8$$

Sumando los términos semejantes queda que el perímetro está representado por la expresión

$$P=6x+26$$

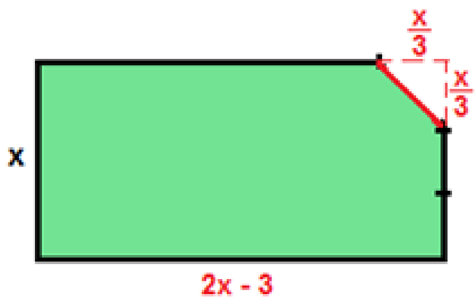
Solución parte b

El área de un rectángulo es el producto entre su base y su altura, juntando los términos semejantes de la base (5 + 8) en un sólo termino 13, se obtiene que

$$A=(2x+8)(x)$$
$$A=2x^2+8x$$

Ejemplo 2

Don Bernardo tenía un terreno rectangular cuyo largo era 3 metros menos que el doble de su ancho. El municipio quería ampliar una carretera para lo cual tenía que quitar 1/3 de su ancho y la misma medida a su largo, tal como se muestra en la figura.



¿Cuál es el área del nuevo terreno?

Solución.

Aunque se pudiera dividir el terreno interior en figuras conocidas para hallar sus áreas y después sumarlas, es más fácil hallar el área del rectángulo completo de base (2x-3) y altura (x) y quitarle el área del triángulo de base (x/3) y altura (x/3)

$$A_{sobrante} = A_{rectángulo} - A_{triángulo}$$

$$A_{sobrante} = b \times h - \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{sobrante} = (2x-3)x - \frac{\frac{x}{3} \times \frac{x}{3}}{2}$$

$$A_{sobrante} = 2x^2 - 3x - \frac{x^2}{18}$$

$$A_{sobrante} = 2x^2 - 3x - \frac{x^2}{18}$$

$$A_{sobrante} = \frac{35}{18}x^2 - 3x$$

Nota: si considera que es menos complicado hallar las áreas por separado y restar luego los resultados, también es válido.

División de expresiones algebraicas

Para dividir expresiones algebraicas se debe tener en cuenta las propiedades de la potenciación

- Producto de potencias de igual base
- Cociente de potencias de igual base
- Potencia de una potencia

División entre monomios

Para dividir dos monomios se aplican las propiedades de la potenciación del cociente, para los términos de igual base.

Ejemplo 1

$$\frac{24x^6y^5z^2}{16y^3x^4z^5} = \frac{24x^2y^2}{16z^3} = \frac{3x^2y^2}{2z^3}$$

Ejemplo 2

$$\frac{4x(x-2)^5(x+1)}{2(x-2)^3(x+1)} = 2x(x-2)^2$$

Ejemplo 3

$$\frac{6x(x-2)^2}{3(2-x)} = \frac{6x(x-2)^2}{-3(-2+x)} = -2x(x-2)$$

División de un polinomio entre un binomio

Realizar la siguiente división

$3x^2 + 4x - 6$ entre $x - 2$

Para realizar una división entre un polinomio y un binomio se siguen los siguientes pasos

1. Se ordena la variable del polinomio en orden descendente desde el término con mayor exponente hasta el término sin variable, colocando un cero en caso de estar incompleto.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + 4x - 6 & \underline{\;x - 2\;} \end{array}$$

2. Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor y se coloca el resultado en el cociente. Este resultado se multiplica por el divisor y se resta del dividendo colocándolos verticalmente debajo de los términos semejantes

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + 4x - 6 & \underline{\;x - 2\;} \\ \underline{-3x^2 + 6x} & 3x \\ \quad\;\; 10x \;\; - 6 & \end{array}$$

3. Se baja el término siguiente a los ya trabajados y se repite el proceso anterior hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor

$$\begin{array}{rr|l}
3x^2 & +4x-6 & x-2 \\ \cline{3-3}
-3x^2 & +6x & 3x+10 \\ \cline{1-2}
 & 10x-6 & \\
 & -10x+20 & \\ \cline{2-2}
 & 14 &
\end{array}$$

Histogramas de frecuencias

Los histogramas son diagramas de barras continuos en donde los valores de la variable o categorías se dividen por intervalos. Estos se utilizan cuando los datos de la variable son tan diversos que sería muy complejo hacer una barra para cada dato o categoría.

Ejemplo de tabla de frecuencia para datos agrupados
Se hace una encuesta a un grupo de padres de familia sobre los ingresos que reciben mensualmente y la información se organiza en la siguiente tabla.

Ingresos mensuales en miles de pesos	Cantidad de personas
[0 a 200)	3
[200 a 400)	8
[400 a 600)	26
[600 a 800)	6
[800 a 1000)	4

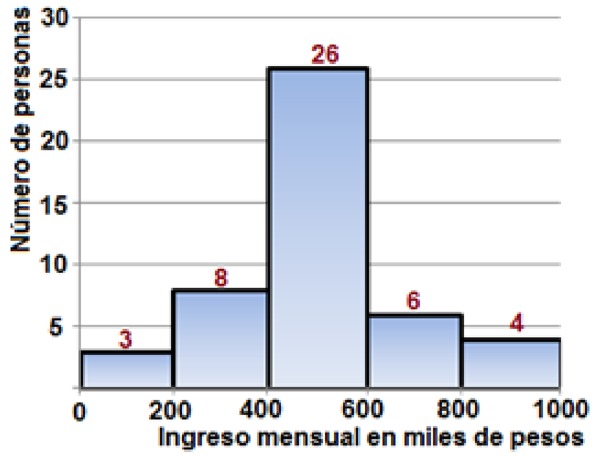
Para leer la gráfica se debe tener en cuenta que el corchete indica que el número del límite se toma y el paréntesis indica que no se toma.

La primera fila se interpreta como "existen 3 personas que ganan entre 0 pesos y menos de 200 mil pesos"

La segunda fila se interpreta como "existen 8 personas que ganan entre 200 mil pesos y menos de 400 mil"

Nótese que el 200 mil sólo se puede incluir en uno de los dos intervalos, en el que el número 200 este acompañado del corchete.

Representación gráfica mediante histograma



Interpretación con porcentajes
¿Qué porcentaje de las personas encuestadas ganan menos de 600 mil pesos?

Solución método 1 (por regla de tres)
Como el total de encuestados fueron 47 y de estos los que ganan menos de 600 mil son 37, utilizando la regla de tres se obtiene

100 % 47

X 37

$$x = \frac{100 \times 37}{47} = \frac{3700}{47} = 78{,}7\%$$

Solución método 2 (por fracciones)
Como 37 de un total de 47 ganan menos de 600 mil pesos, para expresar esta fracción a porcentaje, se le aplica dicha fracción respecto al total expresado como el 100%, esto es.

$$\frac{37}{47} \times 100\% = \frac{37 \times 100}{47} = \frac{3700}{47} = 78.7\%$$

Esto es, 78,7 % de los encuestados ganan menos de 600 mil pesos.

Actividad complementaria

a. Si se escoge una de las personas encuestadas al azar cuál es la probabilidad de ganar entre 600000 y 800000 pesos.

b. Hallar el salario promedio de los encuestados.