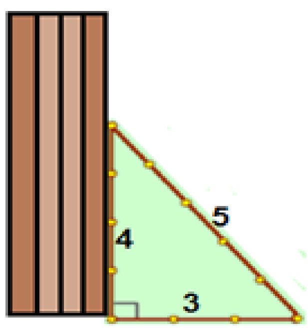
GEO-EST. 10° Periodo 1

Aplicaciones del teorema de Pitágoras en diferentes contextos

El teorema de Pitágoras es uno de los conocimientos antiguos más utilizados de las matemáticas.

Del teorema de Pitágoras se cuenta que uno de sus usos principales en la edad antigua era su aplicación en las construcciones de estructuras perpendiculares. Para ello dividían un lazo en 12 partes iguales y lo colocaban de tal forma que la base y la altura del triángulo quedaran de 3 y 4 partes, mientras que la hipotenusa, con las cinco partes restantes, formaría la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo, tal como se ilustra en el siguiente gráfico.



El teorema de Pitágoras plantea que

En todo triangulo rectángulo el lado mayor al cuadrado (hipotenusa al cuadrado) es igual a, la suma de cada uno de los otros dos lados más pequeños (catetos) al cuadrado.

En el caso del gráfico seria

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

A continuación se presentaran algunas de las aplicaciones más usuales del teorema de Pitágoras.

Áreas y perímetros de polígonos

En cierto lugar de la ciudad de Medellín hay un terreno rectangular rodeado por tres vías, tal como se muestra en la figura.

El terreno fue organizado por la alcaldía de Medellín en su proyecto de hacer a Medellín una ciudad más bella para todos.

a. Si por organizar cada metro cuadrado del terreno les cobraron 200.000 pesos. ¿Cuánto costó todo el trabajo?

b. Además alrededor del terreno se colocaron unos muros de contención para evitar la entrada de los vehículos. Si cada metro de dicho muro tuvo un costo de 50.000 ¿Cuánto costo realizar todo el muro?

Solución parte a

Para saber el costo de organizar todo el terreno, primero se debe conocer la cantidad de terreno a organizar, esto es, su área.

Como es un triángulo rectángulo se debe conocer entonces la base y la altura, pero al no conocer la medida de su altura (x) se utilizará el teorema de Pitágoras para encontrarla.

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto1}^2 + \text{cateto2}^2$$
$$12^2 = x^2 + 8^2$$
$$144 = x^2 + 64$$
$$144 - 64 = x^2$$
$$80 = x^2$$
$$4\sqrt{5} = x$$

Como la altura del rectángulo es $4\sqrt{5}$ metros el área seria

$$A=\frac{b\times h}{2}=\frac{8\times 4\sqrt{5}}{2}=16\sqrt{5}\ \text{m}^2$$

Para hallar el costo de cierta cantidad de unidades cuadradas su multiplica el costo de la unidad por el número de unidades

Valor total = $200000\times 16\sqrt{5}=3200000\sqrt{5}$

De donde se deduce que el costo del trabajo fue $3200000\sqrt{5}\approx 7168000$

Solución parte b

Para determinar el costo del muro de contención alrededor del terreno, se debe determinar primero la medida de su alrededor (perímetro) y luego multiplicar el valor unitario (50000) por la cantidad de metros que tiene el alrededor.

Perímetro del triángulo (suma de todos sus lados)

$$P=4\sqrt{5}+12+8=\left(20+4\sqrt{5}\right)\approx 28{,}9\,metros$$

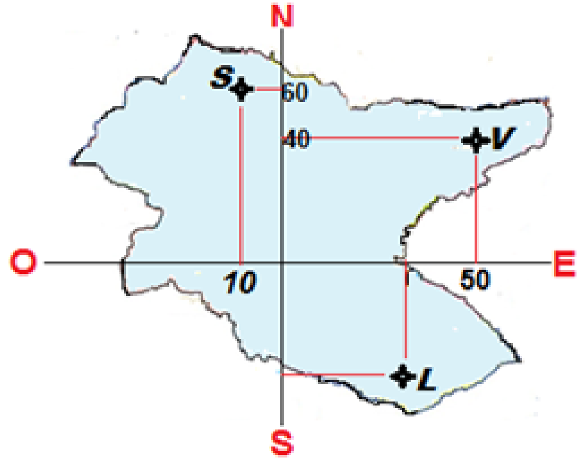
Costo del muro de contención (Valor unitario del metro x cantidad de metros)

$$Costo=50000\left(20+4\sqrt{5}\right)=1000000+200000\sqrt{5}$$
$$Costo\approx \$1.147.213{,}6$$

De donde se deduce que el costo para construir todo el muro de contención fue 1147213,6

Distancias entre dos puntos oblicuos en el plano.

Observe el croquis del mapa de Santo Domingo Antioquia tomando el parque del municipio en el centro del plano y algunos corregimientos aledaños a este como Santiago (S), Versalles (V) y San Luis (S)

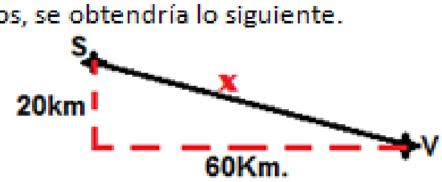


a. Según el croquis determinar la distancia que hay entre Santiago y Versalles, si las unidades de los ejes son los kilómetros.

b. ¿Cuál sería la distancia aproximada de santo Domingo a San Luis? Haga una aproximación de su ubicación según las medidas dadas en el croquis.

Solución parte a

Trazando una línea recta entre Santiago y Versalles y luego formando un triángulo rectángulo desde sus extremos, se obtendría lo siguiente.

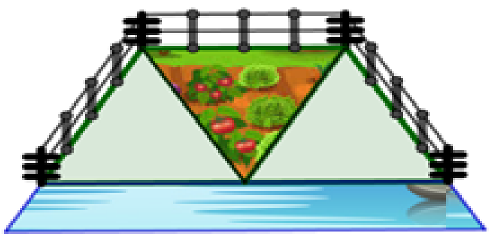


Para hallar la distancia x entre estos dos puntos se utilizará el teorema de Pitágoras.

$$X^2=20^2+60^2$$
$$X^2=400+3600$$
$$X^2=4000$$
$$X=20\sqrt{10}=63{,}24\,Km.$$

Polígonos regulares

Don Darío tiene un terreno al borde de un rio en forma de semi-exágono regular de 800 metros de lado. Este terreno lo dividió en tres triángulos equiláteros de 800 metros de lado, dos de ellos para café y el del centro para huerta, tal como se muestra en la figura.



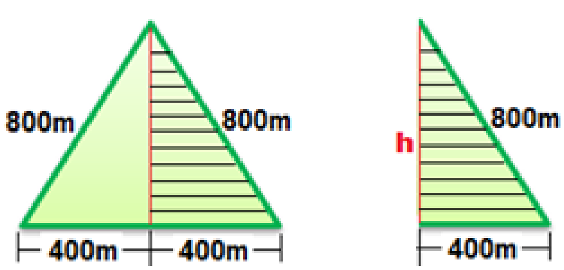
Determinar el área del terreno que debe aparecer en la escritura pública.

Solución parte a

Al dividir el hexágono a la mitad queda un trapecio, conformado por tres triángulos equiláteros iguales. Para hallar su área se puede hallar el área del trapecio completo o el área de un triángulo y multiplicarla por 3. Pero para ambos casos se requiere conocer su la altura.

Como la altura del trapecio es la misma que la de cualquiera de los triángulos, se tomará uno de los triángulos para determinar su altura. Para ello se utilizara el hecho de que en un triángulo equilátero o isósceles, la altura que parte del vértice formado por los dos lados iguales, cae justo en la mitad del otro lado.

Para determinar la altura solo se tomara uno de los triángulos en que se dividió el triángulo inicial, en nuestro caso el del lado derecho.



Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$800^2 = h^2 + 400^2$$
$$640000 = h^2 + 160000$$
$$640000 - 160000 = h^2$$
$$\sqrt{480000} = \sqrt{h^2}$$
$$400\sqrt{3} = h$$
$$692{,}8 \approx h$$

El área del triángulo es entonces

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{800 \times 400\sqrt{3}}{2} = 160000\sqrt{3}$$
$$A \approx 277128{,}1\ m^2$$

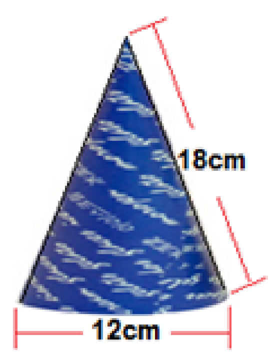
Como el área total son tres triángulos se deduce que

$$ATotal = 3\left(160000\sqrt{3}\right) = 480000\sqrt{3}$$
$$ATotal \approx 831384{,}4 m^2$$

En conclusión, el área de un solo triangulo es 277128,1 m^2 y el área de toda la parcela, es decir de los tres triángulos sería 831384,4 m^2

Volúmenes

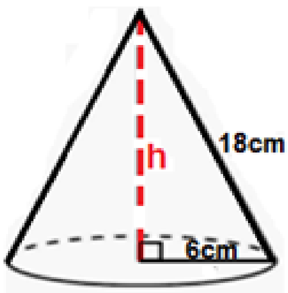
Una empresa de helados saca un nuevo empaque cónico al mercado tipo familiar, con un diámetro de 12 cm y una generatriz de 18 cm., tal como se muestra en la figura.



¿Qué cantidad de cono traerá dicho empaque de helado si su parte interior está completamente llena?

Solución

Al trazar la altura, una bisectriz del cono y el radio que une estas dos líneas, se forma un triángulo rectángulo con un cateto de 6 cm., una hipotenusa de 18 cm. y una altura h, tal como se representa en la figura.



Al resolver el teorema de Pitágoras se obtiene

$$18^2 = h^2 + 6^2$$
$$324 = h^2 + 36$$
$$\sqrt{288} = \sqrt{h^2}$$
$$12\sqrt{2} = h$$

Para determinar el volumen de un cono se multiplica el área de la base por la altura y el resultado se divide por tres.

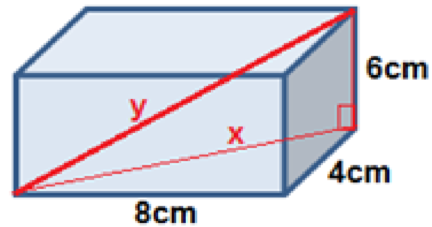
$$V_{cono} = \frac{(\pi \cdot r^2) \cdot h}{3} = \frac{(\pi \cdot 6^2) \cdot 12\sqrt{2}}{3}$$
$$V_{cono} = \frac{(36\pi)12\sqrt{2}}{3}$$

Sacando tercera al 36 y al 3 se obtiene

$$V_{cono} = (12\pi)12\sqrt{2}$$
$$V_{cono} = 144\sqrt{2}\pi$$
$$V_{cono} \approx 639{,}5cm^3$$

Distancia entre dos puntos oblicuos en el espacio. Diagonal de un prisma rectangular

Determinar la medida de la diagonal mayor de una caja cuyo largo, ancho y altura son 8cm, 4 cm y 6 cm. respectivamente.



Solución

Como el largo y el ancho son perpendiculares entre sí, por Teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa (x) se puede determinar mediante la expresión

$$X^2 = 8^2 + 4^2$$

Como la diagonal x, choca justo con la altura de la caja se forma un nuevo triángulo rectángulo con estas dos líneas, por tanto para hallar la hipotenusa (y) de dicho triángulo nuevamente se utilizará el teorema de Pitágoras.

$$Y^2 = X^2 + 6^2$$

Del paso anterior se obtuvo que $\boxed{x^2 = 8^2 + 4^2}$ al reemplazar en la expresión anterior se obtiene

$$Y^2 = 8^2 + 4^2 + 6^2$$

Esto es, la distancia entre dos puntos o diagonal mayor al cuadrado es igual a la suma de cada una de las dimensiones (largo, ancho y altura) al cuadrado.

Sea (x) el largo, (y) el ancho y (Z) la altura, la distancia o diagonal mayor (d) está dada por la expresión

$$d^2 = x^2 + y^2 + Z^2$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

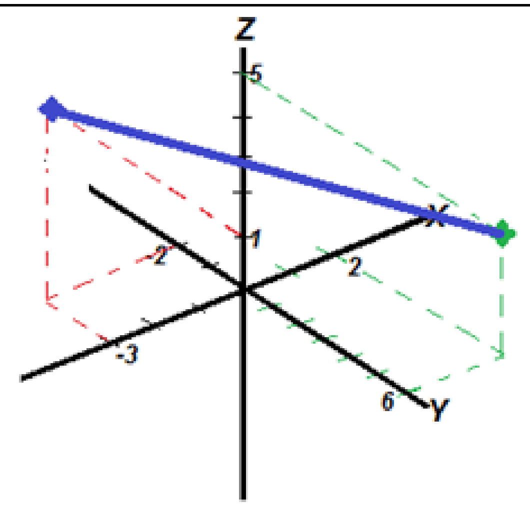
En nuestro caso la diagonal mayor de la caja sería

$$d^2 = 8^2 + 4^2 + 6^2$$
$$d = \sqrt{8^2 + 4^2 + 6^2}$$
$$d = \sqrt{64 + 16 + 36}$$
$$d = \sqrt{116}$$
$$d = 2\sqrt{29} \approx 10{,}8cm$$

Como la visualización de los puntos en el espacio es más compleja, podemos decir que así como en el plano dos puntos que forman una recta, se pueden descomponer en dos componentes rectangulares y se forma siempre un triángulo rectángulo, en el espacio, dos puntos que forman una recta, al descomponerse en sus componentes rectangulares formarían una caja o prisma rectangular.

Ejemplo 2

Hallar la distancia entre los puntos del espacio (-3,-2, 1) y (2, 6, 5)



Para determinar las distancias entre las coordenadas (x) de los dos puntos, entres las coordenadas (y) de los dos puntos y entre las coordenadas (z), basta con hacer una resta entre el número mayor y el número menor de la misma coordenada de ambos puntos.

X = 2 – (-3)= 5
Y= 6 – (-2) = 8
Z = 5 – 1 = 4

Para hallar la distancia entre estos dos puntos aplicando la fórmula del punto anterior se obtiene

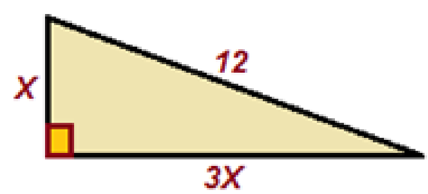
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$
$$d = \sqrt{5^2 + 8^2 + 4^2}$$
$$d = \sqrt{25 + 64 + 16}$$
$$d = \sqrt{105} \approx 10{,}2$$

Ecuaciones con teorema de Pitágoras

De un triángulo rectángulo de 12 cm de hipotenusa se conoce que un cateto mide el triple del otro, determinar las medias de estos dos catetos.

Solución

Se x la medida del cateto menor desconocido, el cateto mayor mediría 3x y por tanto el triángulo formado sería el siguiente.



Al aplicar el teorema de Pitágoras se obtendría

$$12^2 = x^2 + (3x)^2$$
$$144 = x^2 + 9x^2$$
$$144 = 10x^2$$
$$\sqrt{\frac{144}{10}} = \sqrt{x^2}$$
$$\frac{12}{\sqrt{10}} = x$$
$$\frac{12}{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = x$$

$$\frac{12\sqrt{10}}{10} = x$$
$$\frac{6\sqrt{10}}{5} = x$$
$$3{,}8 \approx x$$

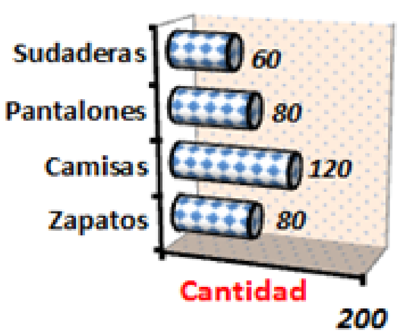
Interpretación y comparación de diferentes tipos de gráficos estadísticos

Una de las herramientas más usuales de la estadística para representar la información de una variable de una manera más simple, son las gráficas estadísticas.

Otra aplicación frecuente es su uso para comparar o relacionar muestras estadísticas y hacer inferencias a partir de esta información.

Ejemplo 1

En las gráficas se muestra el número de productos vendidos en un almacén y el costo de cada producto.



Producto	*Costo unitario*
Sudaderas	*8500*
Pantalones	*35000*
Camisas	*22000*
Zapatos	*25000*

Si se conoce que el almacén vende sus productos con un 20% de ganancia sobre su costo, por cuál de los productos obtendrá mayor ganancia.

Solución

- La ganancia por sudadera, que es el 20% de 8500, sería.

$$\frac{20}{100}\times 8500 = 20\times 85 = 1700$$

Por tanto por las 60 sudaderas vendidas la ganancia es

1700 x 60 = **102000**

- La ganancia por pantalón sería (20% de 35000) 7000. Por tanto por los 80 pantalones serían
  7000 x 70 = **560000**

- La ganancia por camiseta seria (20% 22000) 4400. Por tanto por las 120 camisetas serían
  4400 x 120 = **528000**

- La ganancia por Par de zapatos seria (20% de 25000) 5000. Por tanto por los 80 pares de zapatos serían
  5000 x 80 = **400000**

Se deduce entonces que el producto que le dejo más ganancia fue la venta de los pantalones.

Ejemplo 2

En una institución técnica de la ciudad de Medellín se ofrecen varias especialidades: comercio, informática, administración y secretariado. En la gráfica se muestran los graduandos al finalizar el año escolar, clasificados por estrato (bajo o medio) y por sexo (hombre o mujer)

	Estrato bajo		Estrato medio	
	H	M	H	M
Informática	12	0	15	2
Comercio	8	2	8	4
Administración	6	3	10	3
Secretariado	4	10	7	6

a. Determinar el porcentaje de los estudiantes de estrato medio que se graduaron del programa de informática.

b. ¿Qué porcentaje de los estudiantes graduados en comercio son mujeres?

c. ¿Qué porcentaje de los graduandos pertenecen al programa de secretariado?

Solución parte a

Como del estrato medio se graduaron 55 estudiantes en total y de estos 17 eran del programa de informática, el porcentaje que representan estos estudiantes se pude determinar por varios métodos, entre los más usuales están:

Por fracción

$\frac{17}{55}$ del total

$\frac{17}{55}$ del 100%

$\frac{17\times100}{55}$

30,9%

Por regla de tres

%	*estudiantes*
100	55
x	17

solución

$$x=\frac{100\times17}{55}$$

$x = 30{,}9\%$

De lo que se deduce el 30,9 % de los estudiantes del estrato medio se graduaron del programa de informática.

Solución parte b.

Los graduados en comercio son 22 estudiantes, de los cuales 6 son mujeres. 6 de un total de 22 se escribe como 6/22.

Para convertir de fracción a porcentaje se multiplica la fracción por el 100% lo cual corresponde a (600/22) 27,3%.

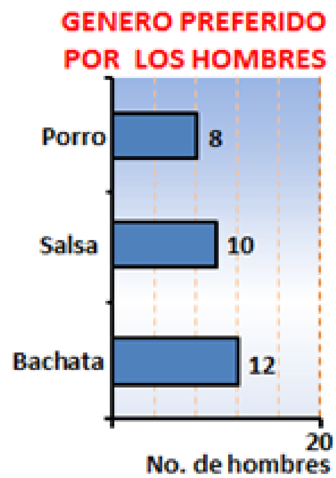
De lo que se deduce que el 27,3% de los que se graduaron en comercio eran mujeres.

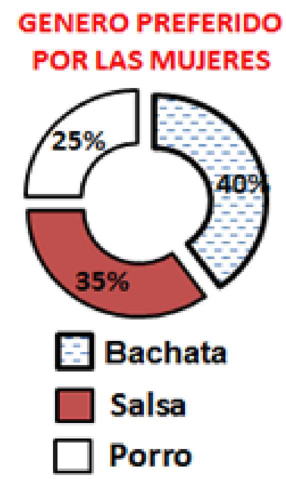
Solución parte c

Como 27 estudiantes del total de los graduandos que son 100, pertenecen al programa de secretariado, se puede inferir que el 27% corresponden a dicho programa.

Ejemplo 4

De un grupo de 40 mujeres y 30 hombres que pertenecen a una academia de baile. Se hace una clasificación de los hombres y las mujeres respecto a su género preferido.





a. ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los hombres que prefieren salsa y las mujeres que prefieren salsa?

b. Qué porcentaje de las 70 personas que pertenecen a la academia prefieren bachata?

Solución parte a

El porcentaje de los hombres que prefieren salsa son 10 de un total de 30 (10/30), al convertir dicha fracción a porcentaje multiplicando por el 100% se obtiene el numero 33,3%.

El porcentaje de las mujeres que prefieren salsa, leído directamente de la gráfica, son el 35%.

Por tanto la diferencia porcentual sería

35% - 33,3% = 1,7%

Solución parte b

De las mujeres, las que prefieren bachata son el 40% de 40, que equivalen a 10 mujeres. De los hombres 12 prefieren bachata, por tanto 24 de un total de 70 prefieren bachata, que al multiplicar por 100% se obtiene como resultado 34,3% del total.