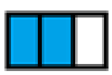
MATEMÁTICAS 6° PERIOD0 3 / Fraccionarios

Objetivo: utilizar las propiedades y operaciones de los números fraccionarios para modelar y resolver situaciones de la vida cotidiana o de otros contextos.

DEFINICIÓN

Una fracción es una expresión de la forma a/b, con a y b perteneciente a los naturales y b diferente de cero, en donde **b** (denominador) representa el número de partes iguales en que se divide el todo (el cual puede ser una cantidad o un objeto) y **a** (numerador) representa el número de partes que se toman de dicha división.

La fracción $\frac{2}{3}$ por ejemplo representa, que el todo o cantidad de referencia, se divide en tres partes y se toman dos de estas. Una posible representación gráfica sería la siguiente.



Es importante tener en cuenta que $\frac{2}{3}$ es una abreviación de decir dos veces un tercio $\left(2\times\frac{1}{3}\right)$, esto es, $\frac{2}{3}$ es lo mismo que $2\times\frac{1}{3}$

La expresión más larga es poco utilizada, ya que uno de los principios básico de las ciencias exactas, es dejar siempre la expresión más simple posible.

LA FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO

Para escoger una parte de una cantidad de referencia determinada "el todo", se utiliza generalmente el concepto de fracción, aunque en algunas situaciones también se puede utilizar los números decimales o el porcentaje, los cuales están estrechamente relacionados entre sí.

Cuando se aplica una fracción a una cantidad u objeto, el denominador indica en cuántas partes iguales se va a dividir este objeto o cantidad de referencia, y el ´numerador, cuántas partes de estas se van a tomar.

Ahora bien, después de hacer este proceso, es fundamental identificar que representa lo sombreado y lo no sombreado y determinar el valor de cada parte, pues a partir de este valor se pueden deducir fácilmente el resto.

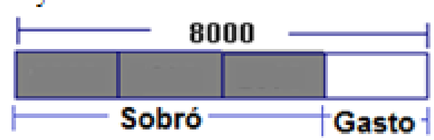
Ejemplo 1

David abrió su alcancía y tenía ahorrados un total de $8.000. Si después de comprar un juguete le quedaron tres cuartos del dinero que tenía. ¿Cuánto dinero costó el juguete?

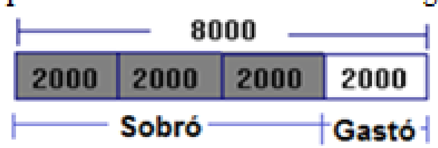
Solución método grafico

Para representar un problema con fracciones se debe identificar el todo o cantidad de referencia sobre la cual se va a aplicar la fracción, en este caso 8000.

Este todo se divide de acuerdo a lo indicado por la fracción, en este caso como es 3/4, se divide en 4 partes y se toman 3, indicando que representa la parte sombreada y la no sombreada.



Para hallar el valor de cada parte, simplemente se reparte el todo (8000) en las 4 partes en que se dividió la figura. Al dividir 8000 entre 4, el resultado obtenido es 2000 por cada parte. Tal como se muestra en la figura.



Finalmente sólo queda leer de la gráfica lo que pregunten. Como preguntan cuánto dinero gastó, serían entonces 2000 pesos.

Solución método matemático

Como le quedan tres cuartos del dinero que tenía que era 8000, para hallar tres cuartos de 8000, se multiplica la fracción por el número, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 8000=\frac{3\times 8000}{4}=\frac{24000}{4}=6000$$

Como le quedan 6000, esto significa que se gastó 2000.

NÚMERO MIXTO

Un número mixto está conformado por una parte entera y una parte fraccionaria.

Para escribir por ejemplo, tres quesitos y medio se escriben la parte entera primero y luego la parte fraccionaria, pero esta última con números más pequeños o con la fracción indicada mediante una raya diagonal, tal como se muestra a continuación.

$$3\,^{1}\!/_{2}$$

Los números mixtos también se pueden escribir como la suma de dos términos (el entero y el fraccionario), o como fracción impropia (haciendo dicha suma o multiplicando la parte entera por el numerador más numerador, todo ello sobre el mismo denominador). Esto es, se puede escribir de tres formas.

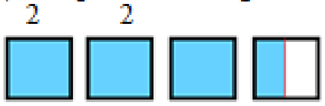
$3\,^{1}\!/_{2}$ Es lo mismo que $3+\frac{1}{2}$

Convirtiendo todo a medios quedaría que

$$\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

Usualmente para representar una cantidad fraccionaria mayor que la unidad se utiliza la primera expresión, que es la que se conoce como número mixto, o la última expresión que se conoce como fracción impropia.

La representación gráfica del número $3\,^{1}\!/_{2}$ que sería lo mismo que $3+\frac{1}{2}$ ó $\frac{7}{2}$ es la siguiente



Ejemplo 1:
Cuánto cuestan los tres quesitos y medio a 2000 pesos el quesito.

Solución
El costo de varios artículos se puede hallar multiplicando el valor unitario por la cantidad de unidades, esto es:

$$2000 \text{ x } \frac{7}{2}=\frac{2000\times 7}{1\times 2}=\frac{14000}{2}=7000$$

De donde se deduce que los 3 quesitos y medio, o lo que es lo mismo 7/2 quesitos, cuestan 7000 pesos.

También se podría decir, de manera lógica, que 3 quesitos a 2000 cuestan (3x2000) 6000, más medio quesito que cuesta 1000, serían en total 7000.

Conversión de fracción impropia a número mixto

Para convertir una fracción impropia (numerador mayor que el denominador) a número mixto, existen varios métodos, uno de ellos es expresar el numerador como suma de denominadores más el sobrante que es el que no alcanza a completar otro denominador.

Ejemplo

$$\frac{5}{2}=\frac{2+2+1}{2}$$

Utilizando la propiedad de que dividir todo por un mismo número es lo mismo que dividir cada termino de manera individual por dicho número, se obtiene

$$\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=1+1+\frac{1}{2}=2\,^{1}\!/_{2}$$

SUMA O RESTA DE FRACCIONES HOMOGENEAS

Antes de explicar el proceso para sumar fracciones es importante tener en cuanta un principio básico de las matemáticas. "**sólo se pueden sumar términos que sean semejantes entre sí**". Si dos términos no son semejantes se deben convertir o expresar a términos semejantes, de lo contrario no se puede realizarse la operación.

Cuando decimos por ejemplo 2 horas 30 minutos, **no** se puede sumar (2 + 30) puesto que no estamos hablando de la misma unidad de medida, esto es, no son semejantes. Se tendría que convertir todo a horas o todo a minutos para poder sumarlos. Aunque no es nuestro objetivo profundizar con términos algebraicos, es importante tener una idea clara de la suma de términos semejantes. Veamos algunos ejemplos.

- **3** manzanas + *5* manzanas = *8* manzanas
- 5 manzanas + **3** peras … **no se pueden sumar**
- **4x + 6x = 10x**
- 2x + 8 ……. **no se pueden sumar**
- $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$
- $3\sqrt{2}+4\sqrt{5}$ ……. **no se pueden sumar**
- $2\frac{1}{7}+3\frac{1}{7}=5\frac{1}{7}$

Obsérvese que si existen varios términos que tengan la misma expresión después del número inicial (términos semejantes), se suman normalmente los números y se coloca la misma expresión que los hace semejantes.

La idea a la que se quiere llegar con estos ejemplos, es que para sumar fracciones, se sigue este mismo principio.

Las partes que se sumen deben ser de igual tamaño y esto se cumple cuando los denominadores son los mismos.

El tamaño de las partes lo determina siempre es el denominador, que indica en cuantas partes se va a dividir algo. Entre mayor sea el denominador, esto es, entre más sean las partes en que se va a dividir algo, estas serán más pequeñas o entre más pequeño sea el denominador, las partes serán más grandes.

Para sumar o restar fracciones homogéneas, como se está hablando de partes iguales, se procede a sumar o restar normalmente los numeradores, según sea el caso, como si fueran términos semejantes, dejando el mismo denominador ya que este es el que hace las veces de la expresión semejante, o en su defecto se podría expresar cada fracción de la forma larga, como se vio anteriormente y simplemente sumar términos semejantes.

Ejemplo 1

Hoy fui a la tienda y compré una gaseosa mega, al medio día en el almuerzo me tome 1/5 de esta y en la noche 3/5.

a. ¿Qué parte o fracción de la gaseosa me he tomado?
b. ¿Qué parte me sobró para el día siguiente?
C. ¿En qué momento tome más gaseosa? ¿Cuánto demás?

Solución parte a

Para saber que parte de la gaseosa me he tomado se debe sumar lo consumido en el almuerzo y en la comida.

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$$

Método 1

Una forma de sumar estas fracciones es expresando en la forma larga cada una de ellas y sumando como si fueran términos semejantes.

$$1\frac{1}{5}+3\frac{1}{5}=4\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

Método 2

Por rapidez se acostumbra utilizar la propiedad de que tener el mismo denominador en todas las fracciones que se están sumando, es lo mismo que dividir todos los numeradores juntos, con sus respectivos signos, por dicho denominador. Esta propiedad es conocida como factor común.

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

Solución parte B

Aunque podría hacerse de manera gráfica, ya que es una fracción con números pequeños, la puedo hacer también de manera imaginaria, especialmente cuando los números son muy grandes.

Si pinto 4 de un total de cinco partes, quedarían sin pintar 1 parte de las 5, esto es 1/5.

Solución parte c

Medio día	Tarde
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Como se están hablando de partes iguales, 3 partes de 5 (3/5) es mayor que 1 parte de 5 (1/5), De lo que se puede deducir entonces que tomó más gaseosa en la tarde.

Para saber que fracción tomó demás tomó, así como cuando se dice que si juan tiene 2000 y Pedro 3000, entonces pedro tiene 1000 más, haciendo una resta entre estos valores. De forma similar, para saber cuánto tomó demás en la tarde que al medio día, se hace también una resta.

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$$

Esto es, en la tarde tomó 2/5 más de la gaseosa que al medio día.

Suma o resta de fracciones heterogéneas.

Para sumar fracciones heterogéneas (con diferente denominador) lo que se hace es convertir dichas fracciones a homogéneas, utilizando el proceso de amplificación de fracciones, con el fin de que las partes indicadas queden de igual tamaño para poder sumarlas, restarlas o hasta compararlas.

La idea es buscar un número que sea múltiplo de todos los denominadores, de tal forma que al amplificar cada fracción los denominadores sean precisamente dicho número.

Aun que puede ser cualquier múltiplo común, se acostumbra por facilidad, el menor múltiplo de todos conocido como mínimo común múltiplo.

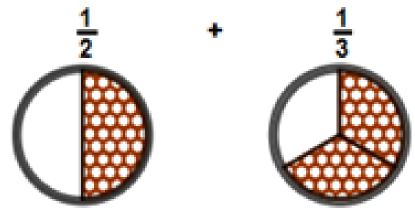
Ejemplo 1

Juan pide una pizza a domicilio y se come 1/2 de pizza. Su hermana Karen por su parte, se come 1/3 de esta.

a. ¿Qué parte de la pizza se comieron?
b. ¿Qué parte sobró?
c. ¿Quién comió más? ¿Cuánto demás?

Solución parte a

La pizza que se comieron entre ambos es la suma de los dos pedazos que se comieron individualmente. Como es complejo graficar la situación en un sólo gráfico, por ser fracciones heterogéneas, se utilizaran dos gráficos para mostrar la situación planteada, donde lo blanco es la parte que se comen y lo sombreado la parte que queda.



Teniendo en cuenta que los medios y los tercios son pedazos de diferente tamaño (denominadores diferentes) no se pueden sumar directamente, si no que se deben convertir antes a fracciones homogéneas.

Una de las formas de convertir a fracciones homogéneas (partes de igual tamaño), es escoger de los posibles múltiplos del denominador mayor (3, 6, 9, 12,…), el que sea múltiplo también de los otros. El 6 por ejemplo, es múltiplo de todos.

Posteriormente se amplifica cada fracción, de tal forma que los denominadores de todas sean dicho múltiplo, en este caso, que todos los denominadores queden como 6.

En el denominador 2 de la primera fracción, para que dé 6, se debe multiplicar por 3 y desde luego también el numerador para no alterar la fracción. Igualmente el denominador 3 de las segunda fracción, para que dé 6, se debe multiplicar por 2, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 2}{3\times 2}$$

Las nuevas fracciones homogéneas, equivalentes a las primeras, pero amplificadas, sería las siguientes.

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$$

Como los denominadores son iguales, significa que se están hablando de pedazos o partes iguales, lo cual permite sumar o restar normalmente los numeradores, dejando el mismo denominador o termino común.

Tres sextos más dos sextos son 5 sextos

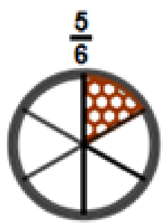
$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Esto es, entre Juan y Karen se comieron $\frac{5}{6}$ de la torta.

Nota: es importante aclarar también que existen otros métodos igualmente válidos, como es el conocido cotidianamente con el nombre de "método en cruz o de la carita feliz", todos ellos siguen implícitamente la idea de convertir todo a fracciones homogéneas o en su defecto a quedar todos divididos por un mismo número, que es equivalente.

Solución parte b

Como se comieron 5 partes de las 6 en que se dividió el todo, la otra parte restante de las 6, (1/6) sobró.



Solución parte C

La parte de la pizza que comió cada uno, expresadas en fracciones homogéneas, según el proceso anterior es la siguiente.

Juan	Karen
$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

De lo que se deduce que Karen comió más pizza que su hermano Juan. En sí comió un pedazo más que Juan de los 6, Por lo tanto comió 1/6 demás, lo cual se puede verificar haciendo la resta entre estas fracciones.

Ejemplo 2

Voy a la legumbrería y compro 1/2 kilo de yuca, 3 kilos de papas, 3/4 kilos de tomate y 1/5 kilo de Cebolla de huevo. ¿Cuánto pesan todos los productos que llevo?

Solución

El peso de estos productos se halla sumando todo.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$$

Como las fracciones son heterogéneas, se deben convertir a fracciones homogéneas.

Un número al que se puedan amplificar todos los denominadores (2, 1, 4 y 5) es el 20.

Para convertir o amplificar todos los denominadores a 20, se multiplica cada denominador por un número que de 20 y este mismo producto se coloca en el numerador, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{1^{x10}}{2_{x10}}+\frac{3^{x20}}{1_{x20}}+\frac{3^{x5}}{4_{x5}}+\frac{1^{x4}}{5_{x4}}$$

$$\frac{10}{20}+\frac{60}{20}+\frac{15}{20}+\frac{4}{20}$$

$$\frac{89}{20}=4{,}45\,kilos$$

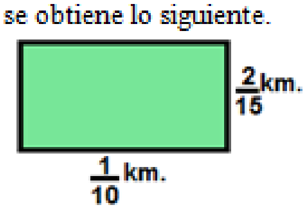
De donde se deduce que el peso total de todos los productos fue de 89/20 kilos, que haciendo la división, da un valor a 4,4 kilos.

Ejemplo 3

Una finca para ganado tiene forma rectangular, de 2/15 de kilómetro de ancho por 1/10 de kilómetro largo, se quiere cercar con tres cuerdas de alambre. ¿Qué alambre se necesitará?

Solución

Graficando un rectángulo de 1/10 km. de largo y 2/15 km. de ancho se obtiene lo siguiente.



Para saber cuánto alambre se requiere, se debe saber cuánto alambre se lleva una vuelta y como son tres vueltas se suma en tres veces o se multiplica por tres. Una vuelta o perímetro mide lo que suman todos sus lados, esto es:

$$\frac{1^{\times 3}}{10_{\times 3}}+\frac{2^{\times 2}}{15_{\times 2}}+\frac{1^{\times 3}}{10_{\times 3}}+\frac{2^{\times 2}}{15_{\times 2}}$$
$$\frac{3}{30}+\frac{4}{30}+\frac{3}{30}+\frac{4}{30}$$
$$\frac{14}{30}=\frac{7}{15}Km.$$

Como son 3 vueltas, se sumaría 3 veces dicho valor, obteniéndose lo siguiente.

$$\frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{21}{15}$$

Esto es 3 vueltas miden 21/15 de kilómetros que al hacer la división quedaría 4,2 kilómetros o 4200 metros aproximadamente.

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Ejemplo 1

Hallar los dos tercios de un medio

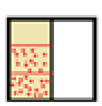
Solución método aritmético

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times 1}{3\times 2}=\frac{2}{6}$$

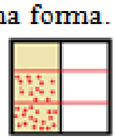
Solución método gráfico

Se grafica primero el último termino (1/2)

Luego a la parte sombreada se le sacan 2/3, esto es, los 2/3 de 1/2



Para hallar el resultado final, toda la figura debe quedar dividida en partes iguales, por tanto se completa el resto de pedazos de la misma forma.



De lo que se deduce que quedaron dos partes punteadas de un total de 6, esto es 2/6.

Ejemplo 2

Determinar el valor de 3 kilos y 1/4 de zanahoria. Si cada kilo cuesta 2500 pesos.

Solución

Los tres Kilos cuestan 3 x 2500 = 7500

El cuarto cuesta $\frac{1}{4}\times\frac{2500}{1}=\frac{2500}{4}=625$

En total serían: 7500 + 625 = 8125

División de fracciones

Para la división de fracciones, el resultado del numerador será precisamente numerador de la primera fracción pero multiplicado por el denominador de la segunda, y el valor del denominador será también el numerador de la primera fracción pero multiplicado por el numerador de la segunda.

Ejemplo 1

Se quiere repartir 3/8 de pizza entre 2 personas ¿de a cuánto le toca a cada persona?

Solución con procedimientos matemáticos

Para trabajar todo con fracciones se coloca siempre denominador 1 a los números enteros, esto es

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{1}$$
$$\frac{3\times 1}{5\times 2}$$
$$\frac{3}{10}$$

o también

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{1}}=\frac{3\times 1}{5\times 2}=\frac{3}{10}$$

A cada persona le corresponden 3/10 de pizza.

Ejemplo 2

Hallar el resultado de la operación 1/3 dividido 2/5

Solución.

$$\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{1\times 5}{3\times 2}=\frac{5}{6}$$

Ecuaciones con fracciones

Para resolver situaciones problemas que involucren ecuaciones con fracciones, es importante identificar la incógnita y las operaciones que se van a realizar en función de dicha incógnita.

Es muy usual que en la formulación de una ecuación se tenga en cuenta el siguiente principio "**la suma de las partes debe ser igual al todo**" o su derivado "**si al todo le quito una parte queda el resto de las partes**"

Ejemplo 1

De la cantidad de dinero que tengo me gaste la mitad de este en una camiseta, 3000 en unas medias y me sobraron 7000.

a. Represente la situación anterior por medio de una ecuación siendo "x" el dinero que tenía inicialmente.

b. Determinar cuánto dinero tenía inicialmente.

Solución parte a

Si tengo en cuenta que la suma de las partes es igual al todo, el todo en este caso sería lo que tenía inicialmente (x) y las partes serían: el costo de la camiseta (x/2), el costo de las medias (3000) y lo que le sobró (5000), por tanto se obtendría que

Camiseta + medias + sobrante = todo

$$\frac{1}{2}x + 3000 + 7000 = x$$

Otra posible forma de hallar la ecuación es teniendo en cuenta que al quitarle al todo una o más partes, queda el resto de las partes, esto es.

Todo − camiseta − medias = sobrante

$$x - \frac{1}{2}x - 3000 = 7000$$

Cualquiera de las dos ecuaciones son validadas e incluso pueden haber más maneras de representa lo mismo, pero al solucionarlas el resultado debe ser igual.

Solución parte b

Uno de los métodos que se pueden utilizar para resolver ecuaciones con fracciones, es convertir todo a fracciones homogéneas y luego trabajar sólo con los numeradores. A continuación se mostrará el proceso completo.

Inicialmente se colocará 1, a los términos que no tengan denominadores.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3000}{1} + \frac{7000}{1} = \frac{x}{1}$$

Para convertir a fracciones homogéneas, el número al que se pueden amplificar todos los denominadores (múltiplo común) es el 2. Aunque también puede ser 4, 6, etc., por facilidad se trabaja con el menor (mínimo común múltiplo)

Al amplificar cada fracción para que los denominadores todos queden como 2, se obtiene lo siguiente

$$\frac{1^{x1}}{2_{x1}}x + \frac{3000^{x2}}{1_{x2}} + \frac{7000^{x2}}{1_{x2}} = \frac{x^{x2}}{1^{x2}}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{6000}{2} + \frac{14000}{2} = \frac{2x}{2}$$

Para que estas expresiones con fracciones homogéneas sean iguales, como los denominadores son iguales, se debe cumplir que los numeradores también deben ser iguales, esto es.

$$1x + 6000 + 14000 = 2x$$

Agrupando los términos semejantes que se puedan agrupar de cada lado, se obtiene lo siguiente.

$$1x + 20000 = 2x$$

Organizando términos semejantes a cada lado para poder operarlos luego, en este caso es más fácil organizar los términos con x a la derecha y los números sin letras a la izquierda, teniendo en cuenta que los que cambien de lado cambian de signo.

$$+20000 = 2x - 1x$$

$$20000 = x$$

Esto es, el dinero que tenía inicialmente era 20000.